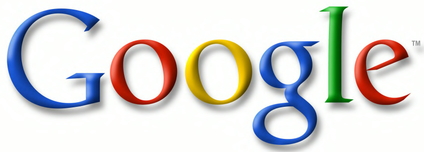
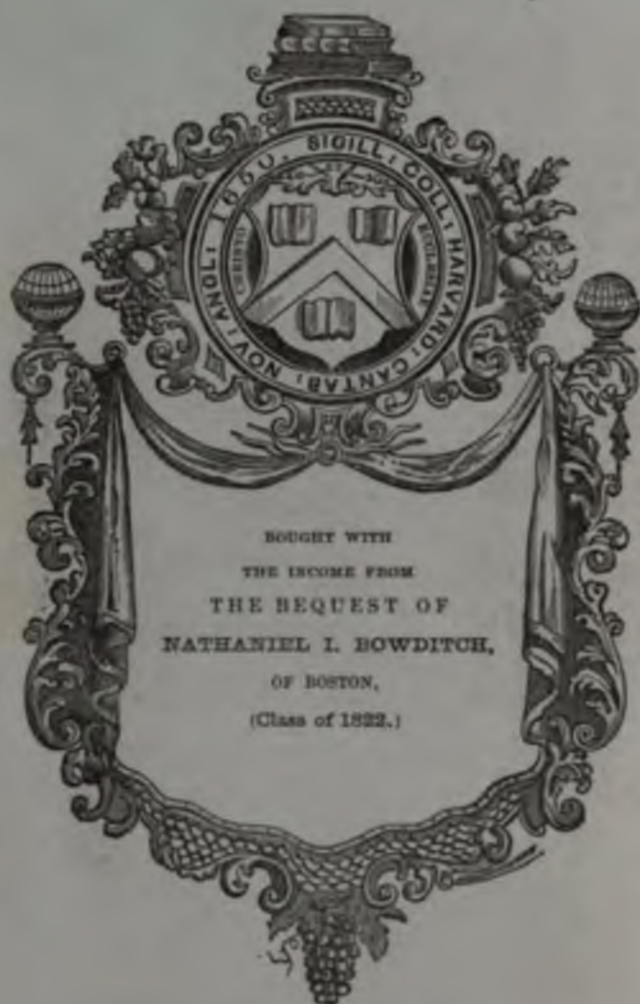



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822.)

LEÇONS

SUR LA

PROPAGATION DES ONDES

ET LES

ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

COURS DU COLLÈGE DE FRANCE

LEÇONS

SUR LA

PROPAGATION DES ONDES

ET LES

ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

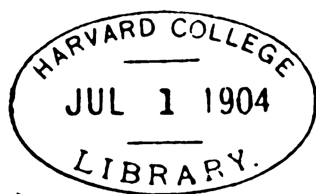
PAR

JACQUES HADAMARD



PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne, 6 et 12

1903


HARVARD COLLEGE
JUL 1 1904
LIBRARY.

A

MONSIEUR MAURICE LÉVY

MEMBRE DE L'INSTITUT

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

AVANT-PROPOS

Dans le cours que j'ai professé au Collège de France, pendant les années 1898-1899 et 1899-1900 (1), et dont diverses circonstances ont retardé la publication, je me suis proposé principalement de rechercher comment s'exerce l'influence des conditions aux limites sur le mouvement des fluides.

S'il s'agit des liquides, la question revient à un problème analogue à celui de Dirichlet, le *problème de Neumann* (2) qui fait l'objet du premier Chapitre de cet ouvrage. La théorie des fonctions harmoniques a subi, dans ces derniers temps, d'importants perfectionnements dont la plupart ne se rattachaient que de loin à mon sujet; j'ai utilisé, en les empruntant à un mémoire de M. Stekloff, ceux qui intéressent directement le problème de Neumann.

---

(1) Les Chapitres I à IV correspondent sensiblement au cours de 1898-1899, et les Chapitres V-VII. à celui de 1899-1900. J'ai toutefois rajouté à l'impression la discussion de la méthode de Neumann d'après M. Stekloff (Nos 12-16), les conditions nécessaires pour le minimum du potentiel élastique N° 270) et les notes finales.

(2) C'est du moins, la dénomination que j'ai adoptée dans le texte, avec M. Stekloff. Dans les récents travaux relatifs aux fonctions harmoniques, qui ont paru pendant l'impression du présent ouvrage cette même dénomination est employée avec un sens tout différent. Il y aurait donc lieu de la modifier, d'autant plus que, si Fr. et C. Neumann ont reconnu l'importance du problème en question, la priorité, au moins en ce qui regarde la publication imprimée, paraît revenir à Bjerknes et à Dini.

Dans le cas des gaz, on est, au contraire, conduit à la théorie d'Hugoniot, sur laquelle l'attention a été attirée depuis quelques années, grâce aux leçons d'*Hydrodynamique, Elasticité et Acoustique* de M. Duhem.

Pour rendre tous les services que la Mécanique peut en attendre, cette théorie, — même telle que la développent les Mémoires *Sur la propagation du mouvement dans les corps* (Journal de l'Ecole Polytechnique, tome XXXIII, cah. 57-59), où la notion de compatibilité est mieux dégagée que dans le Mémoire du Journal de Liouville, — m'a paru réclamer quelques compléments. C'est ainsi que j'ai dû mettre en évidence les faits d'ordre purement cinématique en les séparant de ceux qui dépendent des propriétés dynamiques du mouvement. Moyennant cette distinction, ainsi qu'on devait s'y attendre, beaucoup de points de vue s'éclaircissent. Grâce à elle, en particulier, une représentation géométrique apparait immédiatement. Celle-ci, à son tour, permet de rendre plus étroite l'analogie qui existe entre les ondes telles que les conçoit Hugoniot et celles que considère la mécanique vibratoire.

Enfin, il y avait lieu de rapprocher de la théorie d'Hugoniot celle des caractéristiques des équations à plus de deux variables indépendantes qui en est l'expression analytique et dont J. Beudon, avant sa mort cruellement prématurée, a pu poser les fondements.

La résolution du problème de Cauchy pour les équations linéaires, suivant la voie ouverte par Kirchhoff, se relie d'une manière directe à la notion de caractéristique et se plaçait naturellement après elle. Je n'ai toutefois pas développé dans tous ses détails une théorie qui, malgré les importants travaux publiés depuis l'époque où ce Cours a été professé, n'est pas encore parvenue à sa forme définitive.

Au reste, par sa nature même, un exposé comme celui dont j'ai essayé de définir ainsi l'objet et qui, à la rigueur, comprendrait toute la mécanique des milieux continus, ne saurait être complet, et je n'ai pas eu la prétention de l'être.

Je tiens à remercier ici M. Guadet, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, dont la collaboration m'a été très précieuse. Je lui dois en grande partie la rédaction des deux premiers Chapitres, dont il a également perfectionné certaines démonstrations. Je suis très heureux d'ailleurs d'exprimer ma reconnaissance à tous mes auditeurs du Collège de France, dont l'aide complaisante a facilité à bien des égards la publication de ces leçons.

J. Hadamard.

ERRATA

	Au lieu de :	Lire :
Page 25, ligne 7 en remontant	$\int\int \rho_0 ds = \int\int \rho ds \neq 0$	$\int\int \rho_0 dS = \int\int \rho dS \neq 0$
Page 26, avant-dernière formule, au second membre	$d\sigma$	dS
Page 28, ligne 13 (formule).	$A_i B'_j - A_i' B_j$	$A_i B'_j - A'_j B_i$
Page 35, ligne 3 (formule).	$-\frac{1}{4\pi}\int\int \gamma_A^n F d\sigma$	$-\frac{1}{4\pi}\int\int \gamma_A^n F dS$
	$-\frac{1}{S}\int\int V d\sigma$	$-\frac{1}{S}\int\int V dS$
Page 49, formule (45) . .	$\int \Delta_1(V,W) dS + \int W \frac{\partial V}{\partial n} \partial S$ $+\int W\Delta_2 V dS$	$\int\int \Delta_1 (V, W)\, dS$ $+\int W \frac{dV}{dn} ds$ $+\int\int W\Delta_2 V dS$
Id., ligne 10 en remontant.	régulière et non nulle	régulière et non constante
Page 57, ligne 9	hermonique	harmonique
Page 77, ligne 4 en remontant	les initiales devenues	les indices devenus
Page 83, note	*Journal de l'Ecole Polytechnique*, tome XXXIX	.. tome XXXIII
Page 101, ligne seconde à partir de la formule (47).	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

	Au lieu de :	Lire :
Page 102, ligne 3e, en remontant	δf	$\frac{\delta f}{\delta t}$
Page 129, dernière ligne .	$\dots w\frac{\partial w}{\partial z} \pm Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$	$\dots w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$
Page 130, formule (4) . .	$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial x}$	$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$
Pages 132 et 133, passim.	(5')	(5)
Page 133, formule (8) . .	$\frac{\delta T}{\partial p}$	$\frac{\partial T}{\partial p}$
Page 144, ligne 11 en remontant	(2)	(2')
Page 158, ligne 5. . . .	D, B', B, C, A	D, B', B, — C, A
Page 163, formule (32) . .	$\left(\frac{\partial z}{\partial \eta_1} - \frac{\partial z}{\partial \eta_1}\right)$	$\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta_1}\right)$
Page 170, formule (53) . .	$J\,(l\,(\xi - \xi')\,(\eta - \eta'))$	$J\sqrt{l^2\,(\xi - \xi')\,(\eta - \eta')}$
Page 172, ligne 7. . . .	sans doute quelques difficultés	en général des difficultés : nous le rencontrerons au § 3, nos 194 et suiv. dans un cas particulier.
Id., ligne 10.	le long de s	le long duquel s
Page 187, avant-dernière ligne	une telle discontinuité	une telle continuité
Page 190, ligne 9 en remontant	second	second ordre
Page 202, ligne 16 . . .	$H_1\ H_2$	$H_1,\ H_2$
Page 205, ligne 8. . . .	(66)	(66')
Page 225, troisième formule (1)	$\frac{\partial p}{\partial \eta_1}$	$\frac{\partial p}{\partial z}$
Page 233, ligne 16 . . .	$\frac{dz}{dt}$	$\frac{d\eta_1}{dt}$
Page 239, ligne 13 (formule)	$u_1\alpha + \underline{v}_1\beta + w_1\gamma$	$u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma$
Page 260, ligne 14 . . .	les valeurs (14)	les valeurs (25)
Page 270, ligne 7 en remontant	$\frac{dp_{nn}}{ds} - L_1$	$\frac{1}{2}\frac{dp_{nn}}{ds} - L_1$
Page 286, ligne 3 en remontant	Nous retrouvons donc les mêmes conclusions	Nous retrouverons donc, si $AB' - BA'$ n'est pas nul, les mêmes conclusions
Page 287, ligne 6, en remontant	dont la portion représentée	dont la positionre, présentée
Page 297, ligne 10 en remontant	La condition $\frac{\partial F}{\partial p_{n,n-1}} - 0$	La condition $\frac{\partial F}{\partial p_{n,n-1}} = 0$
Id., ligne 6 en remontant.	une nouvelle condition	de nouvelles conditions
Page 314, note.	L'évanouissement simultanée	L'évanouissement simultané

	Au lieu de :	Lire :
Page 316, 6e ligne de la note.	Optik	*Optik*
Page 319, ligne 11 . . .	$\Pi(x_1, \ldots x_2, x_n)$	$\Pi(x_1, x_2 \ldots, x_n)$
Page 331, ligne 11 en remontant	ou de leurs dérivés	ou de leurs dérivées
Page 336, dernière ligne.	*a*, *b*, c	*a*, *b*, *c*

CHAPITRE PREMIER

LE DEUXIÈME PROBLÈME AUX LIMITES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS HARMONIQUES (1)

§ 1. — PROPRIÉTÉS CLASSIQUES DES FONCTIONS HARMONIQUES

1. — On sait qu'une fonction V est dite *harmonique* dans un domaine D si, pour tous les points intérieurs à D, elle même et ses dérivées des deux premiers ordres ont des valeurs déterminées et si de plus

1° elle satisfait à l'équation $\Delta V = 0$;

2° dans le cas où le domaine D est illimité, elle est *régulière* à l'infini, c'est-à-dire qu'elle se comporte comme un potentiel et ses dérivées, comme les dérivées d'un potentiel.

Sont harmoniques, en dehors des masses attirantes :

1° les potentiels de distributions spatiales

$$\int\int\int \frac{U}{r}\, dx\, dy\, dz$$

(1) Voir entre autres : BJERKNES, *Sur le mouvement simultané des corps*, Act. Soc. Sc. Christiania, 1868-1871 ; DINI, *Sull' Equazione* $\Delta^2 u = 0$, Annali di Matematica, série II, tome 5; 1871 ; BETTI, *Principii dell Idrodinamica razionale*, Mem. Ac. Sc. Bologne, tomes 1-5, 1871-1874; C. NEUMANN, *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*, Leipzig, 1877; FR. NEUMANN, *Potential und Kugelfunctionen*, édité par C. Neumann, Leipz. 1887 ; STEKLOFF, C. R. Ac. Sc., passim ; *Les Méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, Ann. Fac. Sc., Toulouse, 2e série, tome II, et un autre ouvrage (en russe) de même titre, Kharkow ; 1901 ; Poincaré, passim, etc.

2° les potentiels de simples couches

$$\int\int \frac{U}{r}\,dS$$

3° les potentiels de doubles couches

$$\int\int U\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS$$

fonctions du point M dans lesquelles U désigne une fonction de l'élément d'intégration appelée *densité* ou *épaisseur*.

A la seule condition que l'épaisseur U soit partout finie, ces potentiels sont partout finis et continus ainsi que leurs dérivées premières, excepté, s'il s'agit de potentiels superficiels, sur la surface qui les porte : sur celle-ci il y a discontinuité pour le potentiel de double couche et pour les dérivées premières du potentiel de simple couche : les intégrales qui représentent soit la première de ces fonctions, soit la dérivée normale de la seconde subissent deux augmentations brusques égales à $2\pi U$ lorsqu'on passe d'un point pris dans le voisinage de la surface et du côté de la normale positive à un point pris sur la surface, puis lorsqu'on passe de ce dernier à un point pris dans le voisinage de l'autre côté. Les dérivées tangentielles du potentiel de simple couche, au contraire, restent continues. La dérivée normale du potentiel de double couche reste également continue sous certaines conditions de continuité de l'épaisseur U, lesquelles sont, en particulier, vérifiées si U a, sur la surface des dérivées premières et secondes [1].

Si V est une fonction harmonique, dans un domaine, on a, en désignant par r le rayon vecteur issu d'un point quelconque de la surface limite et aboutissant au point A :

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)dS = \begin{cases} 0, & \text{si A est extérieur au domaine.} \\ V_A & \text{si A est intérieur.}\end{cases}$$

Cette formule exprime la valeur de V en A en fonction de ses valeurs et

[1] Voir, par exemple, Liapounoff : *Sur les potentiels de double couche*, Kharkow, 1897 ; et *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet*, Journal de Mathématiques, 1898.

de celle de sa dérivée normale sur une surface quelconque entourant ce point, et cela sous forme d'une somme de potentiels de simple et de double couche.

On en conclut qu'une fonction harmonique dans un domaine :

1° est *analytique*, c'est-à-dire développable en série de Taylor autour de tout point intérieur au domaine ;

2° ne peut avoir ni maximum ni minimum en un point intérieur.

La première de ces deux propriétés peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

Si deux fonctions harmoniques V_1 et V_2 sont définies dans deux domaines D_1 et D_2 extérieurs l'un à l'autre, mais ayant une frontière commune Σ ; si leurs valeurs $\overline{V_1}$ et $\overline{V_2}$ ainsi que celles de leurs dérivées normales $\frac{d\overline{V_1}}{dn}$ et $\frac{d\overline{V_2}}{dn}$ (celles-ci comptées toutes les deux dans le même sens) sont les mêmes sur Σ, V_1 et V_2, sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

La seconde se généralise en ce sens que non seulement une fonction harmonique ne peut avoir ni maximum ni minimum, mais que étant données les limites extrêmes L et L' de cette fonction sur une surface fermée, on peut trouver, pour la différence des valeurs qu'elle prend en deux points donnés situés à l'intérieur de cette surface, une limite supérieure qui est une fraction déterminée de L' — L. L'une des conséquences de cette remarque est le théorème de Harnack, d'après lequel :

1° Une série dont les termes sont des fonctions harmoniques et positives dans un domaine D ne peut être convergente en un point intérieur à ce domaine sans être uniformément convergente et harmonique ainsi que les séries dérivées, dans tout domaine intérieur à D ;

2° Une série de fonctions harmoniques uniformément convergente sur la frontière d'un domaine est d'ailleurs uniformément convergente et harmonique dans tout ce domaine.

2. — La notion de fonction harmonique peut s'appliquer à un nombre quelconque de variables. Dans le plan, on sait que toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction synectique de la variable imaginaire $z = x + iy$, et réciproquement. Soit V la fonction harmonique, $V + iW$ la fonction synectique : W est une autre fonction harmonique, qui sera dite *conjuguée* de V. On a :

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dW}{dn},$$

où ds est un élément d'arc quelconque, dn un élément d'arc normal au premier et positif à gauche. On en tire :

$$V = \int \frac{dW}{dn} ds, \qquad W = -\int \frac{dV}{dn} ds.$$

Une fonction conjuguée est donc déterminée à une constante près. V étant uniforme, W ne le sera que si

$$\int \frac{dV}{dn} ds = 0$$

le long du ou de l'ensemble des contours limites.

La fonction qui joue, dans le plan, le même rôle que $\frac{1}{r}$ dans l'espace est $\log \frac{1}{r}$. Elle donne naissance à des potentiels (potentiels *logarithmiques*), analogues à ceux dont nous venons de parler au n° 1, et qui sont harmoniques dans toute région du plan extérieure aux lignes ou surfaces attirantes.

Une fonction harmonique dans le plan est dite *régulière à l'infini* si l'on peut trouver deux constantes M et C telles que l'allure de la fonction à l'infini soit celle de

$$M \log \frac{1}{r} + C.$$

3. Problèmes aux limites. — On peut se proposer de déterminer une fonction V harmonique soit par la connaissance de ses valeurs $\bar{V}$ sur la frontière, soit par celle des valeurs $\frac{d\bar{V}}{dn}$ de sa dérivée normale, soit par celle des valeurs de $\frac{d\bar{V}}{dn} - h\bar{V}$, h étant une quantité positive. Le premier de ces problèmes est le *problème de Dirichlet* : problème *intérieur* quand tout le domaine d'intégration est à distance finie ; problème *extérieur* quand il s'étend à l'infini en tous sens : dans ce dernier cas, il est bien entendu que la fonction doit être régulière à l'infini.

Si le problème de Dirichlet a une solution, il n'en a qu'une, sauf s'il s'agit du problème extérieur dans le plan, car alors la condition que deux fonctions soient régulières à l'infini n'implique pas que leur différence y soit

nulle. Il faudra donc se donner alors l'une des deux constantes M et C. On ne peut pas toujours se donner arbitrairement C, mais on peut toujours se donner M ; par exemple, s'imposer la condition que M = 0.

4. — La question relative aux fonctions harmoniques dont la solution intéresse le plus l'hydrodynamique n'est pas le problème de Dirichlet, mais le *deuxième problème aux limites* ou *problème de Neumann*, celui dans lequel on donne les valeurs de la dérivée normale. Ce deuxième problème aux limites, dont l'étude est beaucoup moins avancée que celle du problème de Dirichlet, est celui dont nous allons nous occuper maintenant. Il peut être, comme le premier, *intérieur* ou *extérieur*. Dans le premier cas, le théorème de Gauss fournit une condition de possibilité

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\!\!\int \frac{d\mathrm{V}}{dn}\, d\mathrm{S} = 0 & \text{dans l'espace,} \\[2ex] \displaystyle\int \frac{d\mathrm{V}}{dn}\, ds = 0 & \text{dans le plan,} \end{cases}$$

les intégrales étant prises sur l'ensemble des frontières du domaine. Par contre, si le problème est possible, il entre évidemment une constante arbitraire additive dans la solution.

Dans le cas du problème extérieur, il n'y a pas de condition de possibilité, et pas de constante arbitraire additive si l'on est dans l'espace, à cause de la condition de régularité. Dans le plan, au contraire, la constante additive C subsiste. Quant à la constante M du terme M $\log \frac{1}{r}$, elle est déterminée par le théorème de Gauss

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\mathrm{V}}{dn}\, ds.$$

5. Problèmes généralisés. — On peut encore déterminer une fonction U par la condition

$$(2) \qquad \Delta \mathrm{U} = f,$$

où f est une fonction donnée, et par des conditions aux limites semblables aux précédentes.

Les problèmes ainsi posés se ramènent immédiatement aux problèmes sur les fonctions harmoniques correspondants.

Posons en effet

$$U = -W + V,$$

W étant le potentiel spatial

$$W = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{f}{r}\,dx\,dy\,dz$$

On a :

$$\Delta V = 0$$

avec

$$V = U + W$$

ou

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dU}{dn} + \frac{dW}{dn}.$$

Une transformation analogue ferait disparaître, au lieu du second membre de l'équation aux dérivées partielles, celui de la condition aux limites.

§ 2. — LE DEUXIÈME PROBLÈME AUX LIMITES EXISTENCE DE LA SOLUTION

6. — Lord Kelvin a indiqué, pour établir l'existence de la solution du deuxième problème aux limites, une méthode analogue à celle qu'a donnée Riemann pour le problème de Dirichlet. Cherchons le minimum de l'intégrale

$$I = \int\int\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz$$

pour les fonctions V satisfaisant à l'équation

$$K = \int\int VF\,dS \tag{8}$$

où K est une constante arbitraire, mais non nulle ; nous désignons par F les valeurs données de la dérivée normale sur la surface.

Si on suppose la condition de possibilité remplie, soit

$$(1') \qquad \iint F\, dS = 0,$$

I est positif quelle que soit la fonction V et ne s'annule pas si l'équation (3) est vérifiée : en effet I ne peut s'annuler que si V est une constante, ce qui donnerait (en vertu de l'équation (1'))

$$K = 0.$$

Dès lors on est amené à penser que I a, pour les fonctions V satisfaisant à l'équation (3), un minimum positif. Si on suppose, ce qui n'est pas démontré, que ce minimum est réellement atteint pour une fonction V particulière, on peut démontrer avec lord Kelvin que cette fonction V constitue, à un facteur constant près, une solution du problème aux limites proposé.

Changeons en effet V en $V + \varepsilon W$ dans I, celle-ci devient $I + \delta_1 I + \delta_2 I + \ldots$ où $\delta_n I$ représente l'ensemble des termes en ε^n dans le développement de I effectué suivant les puissances croissantes de ε. On doit avoir

$$\delta_1 I = 0$$

quelle que soit W, pourvu que cette fonction satisfasse à

$$(3') \qquad \iint WF\, dS = 0.$$

Mais

$$\delta_1 I = 2\varepsilon \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= 2\varepsilon \left[-\iint W \frac{dV}{dn}\, dS - \iiint W \Delta V\, dx\, dy\, dz \right].$$

Il faut donc que l'équation

$$(4) \qquad \iint W \frac{dV}{dn}\, dS + \iiint W \Delta V\, dx\, dy\, dz = 0$$

soit une conséquence de l'équation (3'). Prenant d'abord pour W une fonction nulle sur la surface et ayant le signe de ΔV partout ailleurs, on voit qu'il faut avoir dans tout le domaine

$$\Delta V = 0.$$

L'équation (4) se réduit dès lors à son premier terme. Elle montre que $\frac{dV}{dn}$ doit être proportionnel à F.

En effet, nous allons voir que, quelle que soit la fonction U, on aura

$$\frac{\int\int UF\,dS}{\int\int U\frac{dV}{dn}\,dS} = \lambda,$$

λ étant un nombre bien déterminé. Il suffit évidemment de montrer que ce rapport est le même pour deux fonctions quelconques U et U'. Or, quelles que soient U et U', on peut toujours trouver une constante μ telle que $U + \mu U'$ substituée à W dans l'équation (3') satisfasse à cette équation. Elle devra donc satisfaire aussi à l'équation

$$\int\int W\frac{dV}{dn}\,dS = 0,$$

ce qui suffit à démontrer la proposition. On en tire

$$\int\int U\left(F - \lambda\frac{dV}{dn}\right)dS = 0,$$

quelle que soit la fonction U ; il faut donc que tous les éléments de l'intégrale soient séparéments nuls, soit :

$$F = \lambda\frac{dV}{dn}, \tag{5}$$

C. Q. F. D.

Réciproquement, une fonction harmonique V satisfaisant à l'équation (5) satisfera à l'équation (3), K étant convenablement choisi, et, parmi toutes les autres fonctions satisfaisant à cette équation (3), rendra minima l'intégrale I.

Il est d'ailleurs clair que le raisonnement précédent prête aux mêmes

objections que le raisonnement analogue de Riemann, rien ne permettant d'affirmer l'existence du minimum considéré.

7. — En réalité, non seulement on n'est pas certain, *a priori*, qu'un problème quelconque de calcul des variations ait une solution, mais il est aisé de voir que le cas où la solution existe ne doit en aucune façon être considéré comme plus général que le cas opposé.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Si l'on cherche le minimum de cette intégrale relativement aux différents arcs de courbes qui joignent entre eux deux points A et B du plan, on voit que ce minimum existe et est fourni par le segment de droite AB.

Cherchons maintenant le minimum de la même intégrale, lorsqu'elle est étendue, non plus à tous les arcs de courbes qui joignent A et B, mais seulement à ceux de ces arcs qui admettent en A et B des tangentes données. Il est aisé de constater que ce minimum n'est pas effectivement atteint. Il existe, en effet, des lignes (par exemple des arcs de coniques de plus en plus aplaties) admettant en A et B les tangentes données, et dont la longueur diffère d'aussi peu qu'on veut de celle de la droite AB. Cette dernière longueur est donc le minimum cherché : or, elle ne correspond à aucune ligne satisfaisant aux conditions du problème.

Nous avons donc ainsi deux problèmes de calcul des variations dont l'un admet une solution, l'autre non. Or, il n'y a aucune raison, *a priori*, pour se poser l'un de ces problèmes plutôt que l'autre, et c'est le second qu'il aurait été le plus naturel d'envisager si, dans l'intégrale proposée, la fonction inconnue avait figuré non seulement par sa dérivée première, mais encore par sa dérivée seconde.

D'une manière générale, considérant l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\left(x, y, y', \ldots, y^{(\mu)}\right) dx$$

et étant données les valeurs de $y, y', \ldots, y^{(\nu)}$ pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, les méthodes classiques du calcul des variations apprennent à trouver le minimum de l'intégrale si $\nu \leq \mu - 1$. Mais si, au contraire, $\nu \geq \mu$, le minimum n'est pas effectivement atteint (sauf pour des valeurs particulières des données).

8. — La théorie des fonctions harmoniques elle-même fournit aisément des exemples analogues. Cherchons, en effet, le minimum de l'intégrale

$$I = \int\int\int_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

la fonction V étant assujettie à cette double condition que V *et* sa dérivée normale prennent, sur la surface S limite de T, des valeurs données $\bar{V}$ et $\bar{V}_n'$. Si un tel minimum était atteint, il correspondrait nécessairement à une fonction harmonique, alors qu'il n'en existe aucune vérifiant à la fois les deux séries de conditions aux limites données.

Le minimum est d'ailleurs fourni par la fonction harmonique V_0 qui prend sur S les valeurs données $\bar{V}$. C'est ce que l'on constatera (du moins dans le cas où cette fonction a ses dérivées finies au voisinage de S) en considérant les fonctions de la forme

$$V = \frac{FV_0 + \lambda\varphi}{F + \lambda}$$

où λ est une constante positive; φ, une fonction quelconque satisfaisant, sur S, aux conditions $\varphi = \bar{V}$, $\frac{d\varphi}{dn} = \bar{V}_n'$; $F = 0$ l'équation de S, F étant positif à l'intérieur de T et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'étant pas toutes nulles sur S. On aura

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{F}{F+\lambda}\frac{\partial (V_0 - \varphi)}{\partial x} + (V_0 - \varphi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{F+\lambda}\right)$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{F}{F+\lambda}\frac{\partial (V_0 - \varphi)}{\partial y} + (V_0 - \varphi)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F}{F+\lambda}\right)$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{F}{F+\lambda}\frac{\partial (V_0 - \varphi)}{\partial z} + (V_0 - \varphi)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F}{F+\lambda}\right)$$

On voit par là que la fonction V satisfait, quel que soit λ, aux conditions, aux limites données, puisque $V_0 - \varphi$ est seul sur S. De plus, en vertu des hypothèses faites sur V_0 et sur F, le quotient $\frac{V_0 - \varphi}{F}$ ne dépasse pas une certaine limite K : il en résulte que les dérivées de V sont partout inférieures en valeur absolue à une limite *indépendante de* λ.

Dès lors, l'intégrale I, pour λ très petit, tend vers la quantité

$$I_0 = \int\int\int_T \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

ainsi qu'on le voit en divisant l'intégrale en deux parties, l'une relative à la région où $F < \varepsilon$, et qui tend vers zéro avec ε (quel que soit λ) parce que

le volume d'intégration est infiniment petit ; l'autre relative à la région où $F > \varepsilon$ et où (ε ayant une valeur déterminée quelconque) les différences

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z}$$

sont infiniment petites avec λ.

Le minimum cherché est donc I_0 et ne peut être atteint par des fonctions satisfaisant aux conditions imposées [1].

§ 3. — CAS DU PLAN

9. — Dans le plan (Dini, *loc., cit.*), le deuxième problème se ramène immédiatement au premier.

En vertu de l'équation

$$\frac{dV}{dn} = -\frac{dW}{ds}$$

où W est la fonction conjuguée de la fonction cherchée V, on est évidemment conduit aux opérations suivantes :

1° Quadratures pour déterminer $\overline{W}$ le long des contours limites ;

2° Résolution du premier problème aux limites sur la fonction W ;

3° Dérivation de W et quadrature

$$\int \frac{dW}{dn} ds = \int \frac{\partial W}{\partial x} dy - \frac{\partial W}{\partial y} dx = \int \frac{dV}{ds} ds = V.$$

10. Discussion de la solution. — 1° *Problème intérieur.* — Bien entendu la condition de possibilité est vérifiée, soit

$$(1) \qquad \int \frac{dV}{dn} ds = 0,$$

l'intégrale étant prise le long de l'ensemble des contours tant extérieurs qu'intérieurs.

[1] Tout récemment, M. Hilbert est arrivé à modifier le raisonnement de Riemann de manière à prouver l'existence de la solution pour le problème de Dirichlet et même, plus généralement, pour un problème quelconque de calcul des variations, moyennant, bien entendu, des conditions restrictives dont la nécessité résulte de ce que nous venons de dire.

Si l'aire donnée est à un seul contour, cette condition exprime que la fonction W est uniforme le long de ce contour, puisque l'on a

$$\int \frac{dV}{dn}\,ds = \int \frac{dW}{ds}\,ds.$$

Dès lors, la fonction W est bien déterminée dans toute l'aire, et l'intégrale $\int \frac{\partial W}{\partial x}\,dy - \frac{\partial W}{\partial y}\,dx$, uniforme dans la même aire, fait connaître la fonction cherchée.

S'il y a n contours limites, l'intégrale $\int \frac{dV}{dn}\,ds$ ne sera pas, en général, nulle sur chacun d'eux, et par conséquent, la fonction W aura sur ces contours, des périodes. Mais on fera disparaître $n - 1$ de ces périodes (et, par suite, la $n^{\text{ème}}$, en vertu de l'équation (1)) en retranchant de la fonction $V + iW$, des fonctions logarithmiques convenablement choisies, par exemple de la forme

$$\lambda_h \log(x + iy - \alpha_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ étant les affixes de points situés respectivement à l'intérieur des $n - 1$ contours intérieurs et les λ des constantes réelles. Les terme ainsi introduits ne modifient d'ailleurs V que d'une quantité uniforme.

Cette précaution étant prise, on connaîtra les valeurs de W aux limites, mais seulement *à une constante additive près sur chaque contour.*

Lorsque $n = 1$, la constante unique ainsi ajoutée aux valeurs de W au contour s'ajoute par cela même à la fonction W dans toute l'aire : elle est sans influence sur la valeur de V.

Mais, pour $n > 1$, une seule des constantes additives $c_1, c_2, \ldots, c_n$ correspondant respectivement aux différents contours $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de l'aire peut être considérée comme insignifiante. Les $n - 1$ autres (ou plutôt les différences $c_1 - c_n, c_2 - c_n, \ldots, c_{n-1} - c_n$) influent d'une manière essentielle sur la fonction W.

D'autre part, pour que la fonction V soit uniforme dans l'aire considérée, il faut que l'on ait, sur chacun des n contours,

$$\int \frac{dW}{dn}\,ds = 0;$$

les n équations ainsi obtenues se réduisant d'ailleurs à $n - 1$, puisque la fonction W est harmonique. La question est donc de déterminer les cons-

tantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ (en supposant $c_n = 0$, ce que l'on a le droit de faire d'après ce qui précède) de manière à satisfaire aux conditions qui viennent d'être écrites.

Soit φ_i la fonction harmonique qui prend, sur C_i, la valeur constante 1 et, sur chacun des $n - 1$ autres contours donnés, la valeur zéro ; et soit γ_j^i l'intégrale $\int \frac{d\varphi_i}{dn} ds$, prise le long du contour C_j. L'addition de la constante c_i aux valeurs de W sur le contour C_i ajoutera évidemment à W le terme $c_i \varphi_i$ et à $\int_{C_j} \frac{dW}{dn} ds$, le terme $c_i \gamma_j^i$. Les équations auxquelles devront satisfaire les c_i seront donc de la forme

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \gamma_j^i = \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

où les α_j sont des quantités données.

Ces équations, se réduisant à $n - 1$ distinctes, détermineront les c_i, à moins que le déterminant $\Sigma \pm \gamma_1^1 \gamma_2^2 \ldots \gamma_{n-1}^{n-1}$ ne soit nul.

Mais cette dernière hypothèse ne peut se réaliser, ce qui revient à dire qu'on ne peut jamais, par des valeurs non toutes nulles des c_i, satisfaire aux équations

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \gamma_j^i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

En effet, φ_i étant constamment compris entre 0 et 1, la quantité γ_i^i est certainement négative et la quantité γ_j^i $(i \neq j)$ positive ([1]). En particulier, on a $\gamma_n^i > 0 (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ et, par conséquent, l'identité $\sum_{i=1}^{n} \gamma_j^i = 0$ (laquelle résulte de l'identité évidente $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 1$) donne

$$|\gamma_j^j| > \sum_{i=1}^{n-1}{}' \gamma_j^i$$

où le signe Σ' désigne une somme étendue aux indices i qui sont différents

---

([1]) Les quantités γ_j^i ne sauraient être nulles si $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ désignent les contours intérieurs : il faudrait, en effet, pour cela, que $\frac{d\varphi_i}{dn}$ fût partout nul sur C_j. Mais, dans ce cas, la fonction φ_i et la fonction égale à 0 (pour $i \neq j$) ou à 1 (pour $i = j$) dans tout l'intérieur de C_j seraient (n° 1) en prolongement analytique l'une de l'autre, et φ_i serait constant, ce qui est absurde.

de j. L'équation correspondant à l'indice j ne saurait donc être vérifiée si c_j est la plus grande en valeur absolue des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

2° *Problème extérieur*. — On retranchera de V, comme précédemment, des termes logarithmiques tels que la fonction conjuguée W n'ait point de périodes sur les contours limites ; et l'on conviendra de déterminer cette fonction W de manière que la constante M (n° 2) soit nulle. Dans ces conditions, les choses se passent exactement comme pour le problème intérieur : la fonction φ_i sera la fonction harmonique qui est égale à un sur le contour d'indice i, à zéro sur tous les autres contours, et qui est régulière à l'infini avec une constante M égale à zéro.

§ 4. — CAS DE L'ESPACE — APPLICATION DE LA MÉTHODE DE NEUMANN

11. — La question n'est pas aussi simple dans le cas de l'espace. Il ne suffit pas alors de pouvoir résoudre le problème de Dirichlet par une méthode quelconque pour en déduire la solution du deuxième problème aux limites.

Par contre, on peut déduire cette solution de la résolution du problème de Dirichlet *par la méthode de Neumann*.

On sait en effet, que cette dernière donne la solution cherchée sous la forme d'un potentiel de double couche.

Cela posé, supposons qu'il s'agisse du problème extérieur, et prenons un potentiel de simple couche de densité $\frac{F}{2\pi}$, la normale étant positive à l'intérieur du domaine (c'est-à-dire à l'extérieur de la surface limite donnée S) et F désignant la valeur donnée de la dérivée normale. Soient W ce potentiel, U sa valeur sur la surface. Déterminons ensuite un potentiel de double couche défini à l'*intérieur* de S et prenant les valeurs U aux points infiniment voisins de S situés à l'intérieur : soit W' ce potentiel, qui s'obtient par la méthode de Neumann et dont la dérivée normale est continue au passage de S.

La fonction cherchée est

$$V = W - W' ;$$

en effet cette fonction, étant la différence de deux potentiels, est harmonique dans le domaine considéré. De plus sa dérivée normale prise sur la surface limite a pour valeur

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dW}{dn} - \frac{dW'}{dn} = \frac{dW}{dn} - \frac{dU}{dn} = 2\pi\frac{F}{2\pi} = F$$

Dans le cas du problème intérieur, il y a une condition de possibilité :

$$\int\int \mathrm{F}d\mathrm{S} = 0.$$

On suivra d'ailleurs exactement la même voie que pour le problème extérieur. La condition de possibilité exprimera que la constante C qu'il faut ajouter dans la méthode de Neumann au potentiel de double couche pour le problème de Dirichlet sera nulle. La différence des dérivées normales se calculera comme dans le cas précédent.

12. — L'emploi de la méthode de Neumann peut prêter toutefois à deux sortes d'objections :

1° Neumann n'a démontré la légitimité de sa méthode que dans le cas d'une surface convexe et non biétoilée. M. Poincaré (1) a levé cette restriction en démontrant dans des cas bien plus étendus la convergence des développements de Neumann ;

2° Il n'est pas évident que la fonction obtenue ait toujours une dérivée normale, et l'étude des conditions d'existence de cette dérivée est assez délicate (voir Liapounoff, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 1898).

Les conditions suffisantes obtenues à cet égard par M. Liapounoff sont de forme relativement compliquée, et rien ne dit que ces conditions soient remplies par les fonctions successives à la formation desquelles conduit la méthode de Neumann.

Cette deuxième objection a pu être également levée. Grâce aux travaux de MM. Stekloff et Korn, nous allons montrer, comme l'a fait M. Stekloff dans les Mémoires cités plus haut, qu'il suffit d'avoir établi la légitimité de la méthode de Neumann telle qu'on l'étudie habituellement, pour pouvoir l'appliquer au problème qui nous occupe.

La méthode de Neumann ainsi appliquée revient d'ailleurs, ainsi que nous allons le voir, à la méthode donnée par Robin pour la recherche de la distribution électrique en équilibre.

Nous désignerons par M un point déterminé quelconque, par r sa distance à un point variable M′ de la surface. Toutes les quantités relatives à ce dernier point seront indiquées par des lettres accentuées. C'est ainsi que

(1) *Acta Mathematica*, t. 20 ; 1896.

nous désignerons par dS' un élément de la surface S entourant le point M', lorsque nous intégrerons par rapport à la position de ce point sur la surface ; par dn' un élément de la normale en M', au lieu que dn désignera un élément de normale en M, lorsque M sera sur la surface ; par V', la valeur en M' d'une fonction quelconque V.

Une fonction quelconque V pourra d'ailleurs avoir des expressions différentes suivant qu'on sera à l'extérieur ou à l'intérieur de S : elle sera désignée, suivant l'usage, dans le premier cas par V_e, dans le second par V_i. C'est ainsi que, pour un potentiel de simple couche, par exemple, nous aurons à distinguer en un point M de la surface les deux dérivées normales $\frac{dV_i}{dn}$ et $\frac{dV_e}{dn}$. Nous considérerons en outre l'intégrale

$$\int\int \rho' \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS' = \int\int \frac{\rho'}{r^2} \cos(r, n) dS',$$

(ρ étant la densité) autrement dit la valeur de $\frac{dV}{dn}$ qu'on obtiendrait en différentiant sous le signe $\int\int$, comme si cette différentiation était légitime et qui est, comme on sait la moyenne des deux dérivées $\frac{dV_i}{dn}$ et $\frac{dV_e}{dn}$.

Nous désignerons cette dernière quantité par la notation $\left(\frac{dV}{dn}\right)$.

ρ_0 étant une fonction continue sur la surface S ; considérons la suite de quantités

$$(6) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{2\pi} \int\int \rho'_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS' \\ \rho_2 = \frac{1}{2\pi} \int\int \rho'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_n = \frac{1}{2\pi} \int\int \rho'_{n-1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS' \end{cases}$$

qui sont précisément celles qui interviennent dans la méthode de Robin [1].

---

[1] Toutefois, dans cette dernière, la fonction ρ_0 est prise telle que $\int\int \rho_0 dS \neq 0$, tandis que nous aurons, au contraire, à supposer cette même intégrale nulle.

Ces quantités peuvent être exprimées à l'aide de potentiels de simples couches. Si, en effet, l'on pose

(7)
$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\rho'_0}{r}\, dS' \\ V_2 &= -\frac{1}{2\pi}\int\int \left(\frac{dV_1}{dn}\right)' \frac{dS'}{r}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_k &= -\frac{1}{2\pi}\int\int \left(\frac{dV_{k-1}}{dn}\right)' \frac{dS'}{r}, \end{aligned}\right.$$

les équations (6) donneront évidemment

$$\left(\frac{dV_1}{dn}\right) = \rho_1, \quad \left(\frac{dV_2}{dn}\right) = \rho_2, \quad \left(\frac{dV_k}{dn}\right) = \rho_k.$$

D'après les propriétés connues des potentiels de simples couches, toutes les intégrales (6) et (7) existeront et seront continues dès que la fonction ρ_0 possèdera cette propriété.

D'autre part, la fonction V_k étant harmonique à l'intérieur de notre domaine et possédant des dérivées normales à la frontière, on a, en un point de S,

$$V_k = -\frac{1}{2\pi}\int\int \left(V'_k \frac{d\frac{1}{r}}{dn'} - \frac{1}{r}\frac{dV'_{ki}}{dn'} \right) dS',$$

mais V'_k est un potentiel de simple couche de densité $-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dV_{k-1}}{dn}\right)$. On a donc

$$\frac{dV'_{ki}}{dn'} = \left(\frac{dV'_k}{dn'}\right) - \left(\frac{dV'_{k-1}}{dn'}\right);$$

substituant dans l'équation précédente, le terme $-\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{1}{r}\left(\frac{dV'_{k-1}}{dn'}\right) dS'$ fera disparaître le premier membre, et il viendra

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int \left(\frac{dV'_k}{dn'}\right)\frac{dS'}{r} = V_{k+1} = -\frac{1}{2\pi}\int\int V'_k \frac{d\frac{1}{r}}{dn'} dS'$$

Or ces équations sont précisément celles que l'on écrit dans la méthode de Neumann, celle-ci étant appliquée en partant de la fonction

$$(7') \qquad V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\rho'_0}{r}\, dS'.$$

Toutefois nous n'obtenons ainsi les fonctions successives de Neumann que sur la surface même. Mais il est aisé d'en déduire l'expression de ces mêmes fonctions dans les domaines intérieurs et extérieurs. Soit, en effet, v_k le potentiel de la double couche d'épaisseur $-\frac{1}{2\pi}V_{k-1}$, c'est-à-dire l'une des fonctions cherchées. On aura, à la surface puisque le potentiel de ladite double couche a, sur la surface même la valeur V_k

$$v_{ki} = V_k + V_{k-1}$$

et cette équation a dès lors lieu dans tout le domaine intérieur. De même on a, pour le domaine extérieur,

$$v_{ke} = V_k - V_{k-1}.$$

Il résulte de là que les potentiels v_{ki} et v_{ke} admettent des dérivées normales, puisque les V_k en admettent. De plus, si l'on tient compte des valeurs des dérivées normales des V_k, il vient

$$\frac{dv_{ki}}{dn} = \frac{dv_{ke}}{dn} = \left(\frac{dV_k}{dn}\right) - \left(\frac{dV_{k-1}}{dn}\right).$$

Il est donc bien prouvé que v_k admet, de part et d'autre de S, des dérivées normales et que ces dérivées normales sont égales entre elles.

13. — Pour étendre la même conclusion à la somme de la série formée avec les v_k comme l'indique Neumann, il faut invoquer, avec M. Liapounof, deux lemmes dont le premier est relatif au mode de continuité de $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ sur la surface et le second, à la manière dont les dérivées normales tendent vers leurs limites au voisinage de cette surface. On suppose que celle-ci est partout régulière (du moins dans le voisinage des points considérés) et, en particulier :

1° qu'elle admet en chaque point un plan tangent déterminé ;

2° qu'il existe une longueur D assez petite pour qu'une parallèle à la normale en un point quelconque de S ne puisse couper S en deux points

situés à l'intérieur de la sphère qui a ce point pour centre et D pour rayon ;

3° que les plans tangents en deux de ses points situés à une distance r l'un de l'autre font un angle moindre que Kr, K désignant un nombre que l'on peut assigner une fois pour toutes (¹).

13 *bis*. — Il résulte aisément de là que chacun de ces plans tangents fait avec la corde qui joint les deux points un angle inférieur à Kr (K désignant une constante) (²).

14. — Dans ces conditions, soit V le potentiel d'une simple couche de densité ρ étendue sur la surface S et cherchons, en fonction de la distance $MM_1 = \delta$, l'ordre de grandeur de la différence entre les valeurs que prend $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ en deux points voisins M et M_1 de S, soit de la quantité

$$\int\int \rho' \left(\frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi_1}{r_1^2}\right) dS',$$

en désignant par r; r_1 les distances des points M, M_1 à un point quelconque M' de la surface, centre de l'élément dS', et par ψ, ψ_1 les angles que M'M et M'M_1 font respectivement avec les normales Mn, M_1n_1 en M et en M_1 (*fig.* 1).

Nous partagerons S en deux parties, l'une s comprenant les points dont la distance à M est inférieure à $\mu\delta$ (μ étant un nombre déterminé plus grand que 1), l'autre s_0 comprenant le reste de S.

Dans la première, l'intégrale $\int \frac{\rho' \cos\psi}{r^2} ds'$ sera plus petite que KA $\int \frac{ds}{r}$ (en désignant par A le maximum de $|\rho|$ sur S), quantité qui, moyennant les diverses hypothèses qui ont été faites, sera plus petite que KAδ. Une évaluation toute semblable s'applique à $\int \frac{\rho' \cos\psi_1}{r_1^2} ds'$.

Dans la partie s_0, les rapports $\frac{r}{\delta}$, $\frac{r_1}{\delta}$ sont supérieurs à $\mu - 1$ et le rapport $\frac{r}{r_1}$, compris entre $\frac{\mu}{\mu + 1}$ et $\frac{\mu}{\mu - 1}$. D'autre part, l'angle M'M_1M ou

(¹) M. Liapounof suppose seulement que cet angle est inférieur à kr^λ : il serait aisé d'adapter les raisonnements qui vont suivre à cette nouvelle hypothèse.

(²) Nous désignons indifféremment par K divers nombres positifs dépendant de la surface, mais indépendants du choix des points M, M_1, M' et de la forme de la fonction ρ.

son supplément est inférieur à Kr (**13** *bis*) et, par conséquent l'angle $MM'M_1$ est inférieur à $K\delta$; il en est donc de même de $|\cos\psi - \cos\psi_1|$, en vertu des inégalités

$$\frac{1}{2}|\cos\psi - \cos\psi_1| < |\psi - \psi_1| < (Mn, M_1n_1) + (M'M, M'M_1) .$$

D'autre part, l'inégalité $|r_1 - r| < \delta$ montre aisément que $\left|\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right|$ est plus petit que $\frac{K\delta}{r^3}$ et, par conséquent, la quantité

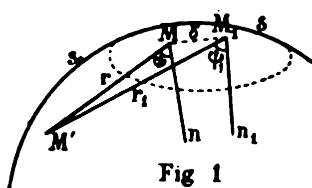


Fig 1

$$\rho\left(\frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi_1}{r_1^2}\right) = \rho\left[\cos\psi\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) + \frac{\cos\psi - \cos\psi_1}{r_1^2}\right]$$

apparaît comme inférieure à $\frac{K\delta A}{r^3}$.

Or l'intégrale $\int\int\frac{dS'}{r^3}$, étendue à la portion de surface pour laquelle $r > R$, est inférieure à $K|\log R|$.

Donc enfin la différence considérée est inférieure à $KA\delta\log\delta$. On remarquera que la limite supérieure ainsi trouvée ne suppose même pas que ρ soit continu : il suffit que cette fonction soit finie.

14 *bis*. — Soient, en second lieu, M_2 un point voisin de M et situé d'un côté déterminé de S, par exemple à l'intérieur, de manière que MM_2 ne soit pas tangent à la surface et fasse même avec elle un angle supérieur à une limite déterminée ; r_2, la distance de M_2 à un point arbitraire M' de S, laquelle, dans ces conditions, est avec MM_2 dans un rapport qui reste supérieur à une limite déterminée ; ψ_2, l'angle que fait $M'M_2$ avec la normale Mn en M ; φ, φ_2 les angles que font $M'M$, $M'M_2$ avec la normale $M'n'$ en M' (*fig.* 2). Cherchons à évaluer la différence qui existe entre l'intégrale $\int\int\rho'\frac{\cos\psi_2}{r_2^2}dS'$ et l'intégrale analogue $\int\int\rho'\frac{\cos\psi}{r^2}dS'$ prise en M.

Cette fois, outre les hypothèses précédemment admises sur la forme de la surface S, nous en ferons une sur les valeurs de la fonction ρ : nous supposerons que la valeur de ρ en M' diffère de la valeur ρ_0 que prend cette fonction au point M d'une quantité inférieure à Lr^α, en désignant par α un exposant déterminé (évidemment au plus égal à 1, si M est quelconque et que ρ ne soit pas constant) et par L une constante.

Nous remarquerons ensuite que l'intégrale $\int\int \frac{\rho_0 \cos\varphi}{r^2} dS'$ est égale à $2\pi\rho_0$ et l'intégrale $\int\int \rho_0 \frac{\cos\varphi_2}{r_2^2} dS$ à $4\pi\rho_0$, et nous écrirons la différence cherchée sous la forme

$$\int\int \rho' \left(\frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi_2}{r_2^2}\right) dS' = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int\int \rho_0 \frac{\cos\varphi}{r^2} dS' - \int\int \rho_0 \frac{\cos\varphi_2}{r_2^2} dS'.$$

$$I_2 = \int\int (\rho' - \rho_0) \left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_2}{r_2^2}\right) dS'$$

$$I_3 = \int\int \rho' \left(\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\psi_2 - \cos\varphi_2}{r_2^2}\right) dS'.$$

Nous connaissons la quantité I_1. Pour évaluer I_2, nous décomposerons encore S en deux parties s, s_0 formées respectivement des points dont la distance au point M est inférieure ou supérieure à $\mu\delta$, δ désignant cette fois la distance MM_2 et μ un nombre fixe (plus grand que 1).

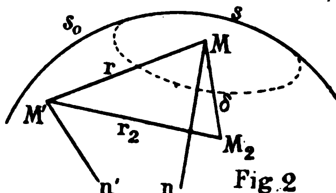


Fig. 2

Dans s, les deux intégrales

$$\int\int (\rho' - \rho_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} dS' \qquad \text{et} \qquad \int\int (\rho' - \rho_0) \frac{\cos\varphi_2}{r_2^2} dS'$$

sont inférieures à $KL\delta^\alpha$, en vertu de l'hypothèse faite sur $\rho' - \rho_0$ et du fait que r_2 est dans un rapport fini avec δ.

Dans s_0, il suffira de remarquer que $|\cos\varphi - \cos\varphi_2| < 2\,|\varphi - \varphi_2| < |K \sin(\varphi - \varphi_2)| < \frac{K\delta}{r}$ et que $\left|\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right| < \frac{K\delta}{r^3}$ pour voir que l'intégrale $\int\int_{s_0} (\rho' - \rho_0) \left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_2}{r_2^2}\right) dS'$ est plus petite que $KL\delta \int\int_{s_0} \frac{dS'}{r^{3-\alpha}}$.

Or l'intégrale $\int\int \frac{dS'}{r^{3-\alpha}}$, étendue à une portion de surface pour laquelle $r > R$, est inférieure à $\frac{K}{R^{1-\alpha}}$. Donc on a $I_2 < KL\delta^\alpha$.

Quant à I_3, il est, dans s, inférieur à $KA\delta$, comme on le voit immédiatement en remarquant que $|\cos\psi - \cos\varphi|$ et $|\cos\psi_2 - \cos\varphi_2|$ sont inférieurs à Kr. Dans s_0, on remarquera $r\cos\psi - r_2\cos\psi_2$ et $r\cos\varphi - r_2\cos\varphi_2$ sont respectivement égaux à $\delta\cos\theta$ et $\delta\cos\theta'$, en désignant par θ et θ' les angles que fait MM_2 avec les normales en M et en M', angles dont la différence est plus petite que Kr.

La quantité $\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\psi_2 - \cos\varphi_2}{r_2^2}$ sera donc la somme de deux termes

$$\frac{r\cos\psi - r_2\cos\psi_2 - r\cos\varphi - r_2\cos\varphi_2}{r_2^3} = \delta\,\frac{\cos\theta - \cos\theta'}{r_2^3}$$

et

$$r\,(\cos\psi - \cos\varphi)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_2^3}\right),$$

dont chacun est inférieur à $\frac{K\delta}{r^2}$. L'intégrale I_3 prise dans s_0 sera donc moindre que $KA\delta\int\int_{s_0}\frac{dS'}{r^2}$, c'est-à-dire que $KA\delta\log\delta$.

Donc enfin la différence cherchée est inférieure à $KL\delta^\alpha$ pour $\alpha < 1$, et à $K(A + L)\delta\log\delta$, pour $\alpha = 1$.

Notre raisonnement suppose toutefois que le point O_2 se rapproche de M de manière que l'angle de MM_2 avec la surface ne soit pas infiniment petit. Mais il est aisé de se passer de cette condition. Il suffit, lorsqu'elle n'est pas réalisée, de considérer un point M_1 situé sur S et tendant vers M en même temps que M_2 de manière que l'angle de M_1M_2 avec la surface soit toujours supérieur à une limite déterminée. On comparera alors les deux intégrales $\int\int\frac{\cos\psi}{r^2}dS'$ et $\int\int\frac{\cos\psi_2}{r_2^2}dS$ à l'intégrale analogue $\int\frac{\cos\psi_1}{r_1^2}dS$ relative au point M_1 : en vertu de ce que nous venons de démontrer et de ce qui a été établi précédemment n° 13 nous aurons, pour les deux différences ainsi obtenues, des limites supérieures de la même forme que celles qui viennent d'être indiquées pour le cas où MM_2, faisait avec la surface un angle fini. La conclusion est donc absolument générale.

15. — Nous avons encore une remarque à présenter, relativement à la dérivée normale du potentiel de double couche. Les conditions précédemment imposées à la fonction ρ ne nous permettent pas de conclure que cette dérivée a une limite à la surface, ni même qu'elle est finie ; mais la limite supérieure que nous allons trouver pour cette dérivée, quoique augmentant indéfiniment lorsqu'on s'approche de la surface, va suffire pour la suite du raisonnement.

Nous obtiendrons cette limite supérieure en remarquant que la dérivée, suivant une direction quelconque, de l'expression $\frac{\cos\varphi}{r^2}$ (où r est la distance du point variable M à un point déterminé quelconque M' de la surface et φ l'angle de MM' avec la normale en M') est inférieure à $\frac{K}{r^3}$. La dérivée du potentiel de double couche sera donc moindre que $KA\int\int\frac{dS'}{r^3}$ (où A est le maximum de $|\rho|$). Or il est aisé de s'assurer (en comparant, par exemple, avec l'intégrale analogue prise en remplaçant la surface par son plan tangent) que cette expression est moindre que $\frac{KA}{\delta}$, si δ est la distance du point M à la surface.

16.— Cela posé, reprenons les fonctions V_k ; supposons démontré (comme on est conduit à le faire dans la méthode de Neumann) qu'elles tendent vers une constante L, la différence étant uniformément plus petite que le $k^{ème}$ terme d'une progression géométrique de raison λ. Cherchons d'abord à en déduire une limite pour $\rho_k = \left(\frac{dV_k}{dn}\right)$.

A cet effet, M étant un point de la surface et M_2 un point pris à l'intérieur sur la normale en M, à une distance δ du point M, appliquons à la fonction ρ_k les inégalités que nous avons trouvées aux n° **14** et **14** *bis*. R_k désignant le maximum de $|\rho_k|$ sur S, nous voyons d'abord que la différence de deux valeurs de ρ_{k+1} correspondant à deux points de S situés à une distance d l'un de l'autre est moindre que KR_kd^α (α étant plus petit que 1, mais d'aussi peu qu'on le veut). Il en résulte que, en M_2, la valeur de $\frac{dV_{k+2}}{dn}$ satisfait à l'inégalité

$$(9)\qquad \left|\left(\frac{dV_{k+2}}{dn}\right)_{M_2} - (\rho_{k+2} - \rho_{k+1})\right| < K(R_k + R_{k+1})\,\delta^\alpha.$$

Or V_{k+2} peut se mettre sous la forme d'un potentiel de double couche. Nous avons vu, en effet, que la double couche d'épaisseur V_k avait pour

potentiel intérieur $V_k + V_{k+1}$. Donc V_k sera à une constante près, (étant données les hypothèses de convergence faites sur les V) le potentiel d'une double couche dont l'épaisseur est

$$W_k = V_k - V_{k+1} + V_{k+2} - V_{k+3} + \dots$$

par conséquent moindre que $C\lambda^k$ (C étant une constante déterminée). L'inégalité trouvée pour la dérivée normale du potentiel de double couche permet donc de mettre l'inégalité (9) sous la forme

$$|\rho_{k+2} - \rho_{k+1}| < K\left((R_k + R_{k+1})\delta^2 + \frac{C\lambda^k}{\delta}\right);$$

nous ferons $\delta = \lambda^{\frac{k}{3}}$, $\lambda^{\frac{2}{3}} = \lambda'$, et il viendra [1]

(10) $$|\rho_{k+2} - \rho_{k+1}| < (K(R_k + R_{k+1}) + C)\lambda'^k.$$

En particulier, on aura

$$R_{k+2} < R_{k+1} + \lambda'^k[K(R_k + R_{k+1}) + C].$$

On obtiendra une limite supérieure de R_k en remplaçant les inégalités successives ainsi obtenues par les égalités correspondantes. On aura alors $R_{k+1} > R_k$ et, par conséquent,

$$R_{k+2} < R_{k+1} + \lambda'^k(2KR_{k+1} + C)$$

ou

$$R_{k+2} + \frac{C}{2K} < (1 + 2K\lambda'^k)\left(R_{k+1} + \frac{C}{2K}\right).$$

Cette inégalité nous montre $R_k + \frac{C}{2K}$ comme un produit infini convergent, et, par conséquent, R_k comme une quantité finie.

Il en résulte d'après l'inégalité (10) que la série $\sum(\rho_{k+1} - \rho_k)$ converge uniformément à la façon d'une progression géométrique. La fonction ρ_k tend donc, en chaque point de la surface, vers une limite ρ, qui satisfait d'après les équations de définition (6) à l'équation

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int\int \rho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS'.$$

(1) K désignant toujours indifféremment divers nombres positifs qui ne dépendent que de la nature de la surface S, C désignera indifféremment divers nombres positifs qui ne dépendent que de S et de la forme de la fonction ρ_0.

Si l'intégrale $\int\int \rho_0 dS$ est différente de zéro, cette fonction ρ n'est pas identiquement nulle $\left(\text{puisque l'on a} \int\int \rho dS = \int\int \rho_0 dS\right)$: elle est la distribution de la couche électrique en équilibre (la surface S étant celle d'un conducteur isolé et soustrait à toute influence), la méthode par laquelle elle vient d'être obtenue étant celle de Robin.

Si au contraire $\int\int \rho_0 dS = \int\int \rho dS = 0$, la fonction ρ est identiquement nulle. Cela revient, en effet, à dire qu'une couche électrique en équilibre par elle même et de quantité totale nulle est à l'état neutre partout : proposition dont la démonstration est bien connue.

$|\rho_k|$ est alors plus petit que $C\lambda'^k$ (C désignant une constante). Il en résulte, d'après le n° **14**, que la différence des valeurs de ρ_k en deux points M, M_1 de la surface est moindre que $C\lambda'^k . \overline{MM_1}^\alpha$; puis, en vertu du n° **14** *bis*, que l'on a l'inégalité

$$(11) \qquad \left| \left(\frac{dV_{ki}}{dn}\right)_{M_2} - (\rho_k - \rho_{k-1}) \right| < C\lambda'^k . \overline{MM_2}^\alpha$$

et enfin, d'après ce qui a été vu au n° **12**, l'inégalité

$$(12) \qquad \left| \left(\frac{dv_k}{dn}\right)_{M_2} - (\rho_k - \rho_{k-2}) \right| < C\lambda'^k . \overline{MM_2}^\alpha.$$

Cette dernière inégalité est d'ailleurs vraie, que le point M_2 soit intérieur à la surface ($v_k = v_{ki}$) ou extérieur ($v_k = v_{ke}$) ; elle démontre que la conclusion relative aux dérivées normales des fonctions v_k s'étend à la série de Neumann qui a pour termes ces fonctions, puisque le coefficient de $\overline{MM_2}^\alpha$, dans le second membre, est le terme général d'une série absolument convergente ; elle achève par conséquent la résolution de la question.

Si $\int\int \rho_0 ds = \int\int \rho ds \neq 0$, nous n'avons à nous occuper que de la solution du problème hydrodynamique *extérieur*, et, par conséquent, nous n'avons à considérer que la série par laquelle Neumann résout le problème de Dirichlet *intérieur*. Or cette dernière est alternée, de sorte qu'il nous suffira, cette fois, d'établir des inégalités analogues à (**11**) et à (**12**) en remplaçant V_k, v_k, ρ_k par $V_k - V_{k-1}$, $v_k - v_{k-1}$, $\rho_k - \rho_{k-1}$. Or on obtiendra de pareilles inégalités en remplaçant, dans les raisonnements qui ont

conduit aux formules (11) et (12), ρ_k par $\rho_k - \rho_{k-1}$, lequel est en toute hypothèse $\left(\text{que} \int\int \rho_0 dS \text{ soit nul ou non}\right)$ inférieur à $C\lambda'^k$.

La conclusion demandée est donc établie dans tous les cas. Elle nous fait connaître la solution du problème de Neumann, ρ_0 étant pris égal aux valeurs données F de la dérivée normale et la fonction V_1 définie par l'équation (7) n'étant autre, au signe près, que le potentiel W du n° **11**.

17. — Si au lieu de se donner exactement les valeurs d'une fonction harmonique V sur la surface limite S d'un certain volume, on se donne seulement une limite supérieure du module de V, on peut, ainsi que nous l'avons rappelé plus haut, assigner des limites supérieures aux modules de V et de ses dérivées en un point intérieur quelconque.

De même, on peut se proposer de trouver des inégalités analogues lorsqu'on se donne, non plus une limite supérieure de $|V|$, mais une limite supérieure de $\left|\frac{dV}{dn}\right|$ à la surface. Il ne peut être question, ici, d'obtenir une limite supérieure de $|V|$ en un point donné, puisque V n'est déterminé qu'à une constante près. On peut seulement assigner une limite à la différence des valeurs de V en deux points intérieurs donnés quelconques. C'est à quoi la méthode précédente permet aisément de parvenir (1).

Soit en effet α une limite supérieure du module de

$$F = \frac{dV}{dn};$$

$$|F| < \alpha.$$

Le potentiel W défini plus haut

$$-V_1 = W = \int\int \frac{F}{2\pi r} d\sigma$$

sera tel que l'on aura

$$|W| < K\alpha,$$

(1) POINCARÉ. — *Sur les équations de la Physique Mathématique*, *Rendic. del Circolo matematico di Palermo*, tome 8, p. 114-115 ; 1894.

K étant une constante ne dépendant que de la forme de la surface. On en déduit, si $[W]$ représente l'oscillation possible de W :

$$[W] < 2K\alpha.$$

On détermine ensuite dans la méthode de Neumann :

V_2, potentiel de double couche d'épaisseur $\frac{W}{2\pi}$,

V_3 » » » $\frac{V_2}{2\pi}$,

. . . .

V_i » » » $\frac{V_{i-1}}{2\pi}$,

et l'on a, d'après Neumann, λ étant une constante positive inférieure à un :

$$[V_2] < \lambda [W]$$
$$[V_3] < \lambda [V_2]$$
$$[V_i] < \lambda [V_{i-1}].$$

On en déduit :

$$[V_{i+1}] < 2\lambda^i K\alpha$$
$$[V] = [W + \Sigma V_i] \leqslant [W] + \Sigma [V_i] < \frac{1}{1-\lambda} 2K\alpha$$

ou

$$[V] < h\alpha,$$

h étant une constante déterminée.

18. Recherche directe d'inégalités. — On peut, jusqu'à un certain point obtenir des conclusions analogues directement sans passer par la méthode de Neumann, en employant quelques-uns des moyens par lesquels M. Poincaré (1) a établi la légitimité de cette méthode et faisant tout d'abord usage de l'inégalité de M. Schwartz.

On sait que cette inégalité résulte de la considération de l'intégrale

$$H = S [(A_1 + \lambda B_1)^2 + (A_2 + \lambda B_2)^2 + \quad + (A_p + \lambda B_p)^2] \, d\sigma$$

où S est un symbole d'intégration simple ou multiple étendue à une multiplicité σ, $d\sigma$ l'élément différentiel de σ ; $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$, des fonctions déterminées et λ une constante arbitraire : intégrale qui s'écrit

$$(13) \qquad H = I + 2\lambda K + \lambda^2 J,$$

(1) *Acta Math.*, loc. cit.

en posant

$$\begin{aligned} I &= S\,(A_1^2 + A_2^2 + \ldots \qquad)\, d\sigma, \\ K &= S\,(A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots)\, d\sigma, \\ J &= S\,(B_1^2 + B_2^2 + \ldots \qquad)\, d\sigma. \end{aligned}$$

La forme quadratique (13) étant positive, quelque soit λ, on doit avoir

(14) $$\Delta = IJ - K^2 > 0$$

et c'est en cela que consiste l'inégalité de M. Schwartz.

Le minimum de H, lorsque λ varie, a lieu pour $\lambda = -\frac{K}{J}$ et a pour valeur

$$H = \frac{\Delta}{J}.$$

Enfin l'inégalité (14) résulte encore de l'expression de Δ lui-même sous forme d'intégrale multiple

$$\Delta = \frac{1}{2}\, SS\left[\sum_{i,j} (A_i B'_j - A'_i B_j)^2\right] d\sigma\, d\sigma',$$

où les éléments $d\sigma$, $d\sigma'$ décrivent, indépendamment l'un de l'autre la multiplicité σ et où les A', B' sont les valeurs des fonctions A, B en un point de $d\sigma'$.

Appliquons l'inégalité précédente au cas où σ est une surface fermée S : Soit V une fonction harmonique à l'intérieur de S. Considérons d'abord l'intégrale de surface

$$H = \int\!\!\int (V - \lambda)^2\, dS.$$

Il résulte de ce qui précède que le minimum de cette intégrale est $\frac{\Delta}{S}$, en désignant par Δ l'intégrale quadruple

$$\Delta = \frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int (V - V')^2\, dS\, dS'.$$

Considérons, en second lieu, l'intégrale de volume

$$G' = \int\int\int_D \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

(où $d\tau$ est l'élément de volume $dx\,dy\,dz$), étendue au domaine D limité par S. V étant harmonique, on a

$$G = -\int\int (V + \lambda) \frac{dV}{dn} dS,$$

quelle que soit la constante λ, et, par conséquent, en vertu de l'inégalité (**14**),

$$G^2 < HJ$$

où

$$J = \int\int \left(\frac{dV}{dn}\right)^2 dS.$$

En donnant à λ la valeur qui correspond au minimum de H, il vient

$$(15) \qquad \frac{G^2}{\Delta} < \frac{J}{S},$$

S désignant l'étendue totale de la surface donnée.

Si l'on s'est donné les valeurs de $\frac{dV}{dn}$ sur cette surface, *le second membre de l'inégalité précédente est connu.*

19.—Mais M. Poincaré a établi, entre les quantités G et Δ, une seconde inégalité : il a montré que *l'on peut, quelque soit la fonction* V (harmonique ou non), *assigner au rapport* $\frac{\Delta}{G}$ *une limite supérieure qui ne dépend que de la forme de la surface.*

Supposons d'abord celle-ci convexe et telle qu'il existe une limite supérieure ρ au rapport $\frac{l}{\cos(l, n)}$ l étant la longueur d'une corde de la surface,

et (l, n) l'angle de cette corde avec la normale à l'une de ses extrémités.

Soit en outre L le maximum de la longueur l. On peut, dans l'intégrale quadruple Δ, exprimer dS' au moyen de l'angle sphérique

$$d\varpi = \frac{dS' \cos(l, n)}{l^2}$$

sous lequel on voit dS' d'un point de dS. On a, d'après l'hypothèse :

$$\Delta < \frac{\rho^2}{2} \int\int\int\int (V - V')^2 \cos(l, n)\, dS\, d\varpi.$$

Je mets en évidence les intégrations successives, en supposant qu'on effectue d'abord celle relative à l'élément dS de S, puis celle relative à l'élément $d\varpi$ de la sphère Σ sur laquelle on fait successivement les différentes représentations sphériques de centres dS ; remplaçant en outre $(V - V')$ par une intégrale linéaire prise le long de l, on a :

$$\Delta < \frac{\rho^2}{2} \int\int_{\Sigma} d\varpi \int\int \cos(l, n)\, dS \left[\int_0^l \frac{dV}{dl}\, dl\right]^2$$

Mais, d'après l'inégalité de M. Schwarz on peut écrire

$$\left(\int_0^l \frac{dV}{dl}\, dl\right)^2 < l \int_0^l \left(\frac{dV}{dl}\right)^2 dl < L \int_0^l \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dl.$$

Il vient donc

$$\Delta < \frac{\rho^2 L}{2} \int\int_{\Sigma} d\varpi \int\int_{S} \cos(l, n)\, dS \int_0^l \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dl$$

ou, puisque $\cos(l, n)\, dS$ est la projection de dS sur un plan perpendiculaire à la direction de l,

$$\Delta < \frac{\rho^2 L}{2} \int\int_{\Sigma} d\varpi \int\int\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

L'intégrale triple n'est autre (quel que soit l'élément $d\varpi$ envisagé) que G.

Il vient donc

(16) $$\frac{\Delta}{G} < \lambda,$$

$$\lambda = \frac{\rho^2 L}{2} \int\int_\Sigma d\varpi = 2\pi\rho^2 L.$$

20. — Cherchons à passer du domaine limité par une surface satisfaisant aux conditions du numéro précédent au domaine limité par une autre surface quelconque. Nous pourrons en général, si la connexion reste la même, c'est-à-dire si nous avons toujours affaire à une surface unique simplement connexe, établir une correspondance entre les points (x, y, z) et (x', y', z') des deux domaines telle que les coordonnées du second soient continues par rapport à celles du premier, que leurs dérivées du premier ordre soient finies et continues sur la surface limite et que le module du déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)}$$

reste constamment supérieur à une quantité positive donnée.

Je dis que dans ces conditions, le rapport

$$\frac{\Delta G'}{\Delta' G}$$

(Δ' et G' étant les quantités analogues à Δ, G) a un maximum positif déterminé. Cela suffira évidemment pour que l'on puisse tirer de l'inégalité du paragraphe précédent une autre inégalité

$$\frac{\Delta'}{G'} < \lambda'$$

Posons pour le démontrer :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \varphi\left(\frac{\partial V}{\partial x'}, \frac{\partial V}{\partial y'}, \frac{\partial V}{\partial z'}\right)$$

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = f(dx, dy, dz).$$

Les formes f et φ ont pour discriminant le carré du déterminant fonctionnel. Ces deux formes représentent des ellipsoïdes dont les axes sont compris entre des limites déterminées. On connaît donc une limite inférieure de la quantité

$$\frac{\varphi}{\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2}$$

Le rapport $\frac{d\tau'}{d\tau}$ a aussi un minimum. Il en est donc de même de $\frac{G'}{G}$. D'autre part $\frac{dS'}{dS}$ a un minimum donné par le rapport des sections de l'ellipsoïde $f = 1$ et de la sphère de rayon 1. On a donc bien ainsi un minimum de $\frac{\Delta}{\Delta'}$.

21. — On peut procéder autrement et généraliser le mode de démonstration du paragraphe précédent en employant, au lieu de cordes rectilignes, des cordes curvilignes à 4 paramètres, telles que par deux points de la surface il en passe toujours une et une seule ; qu'il y ait des limites supérieures L, ρ à leur longueur l et au rapport $\frac{l}{\cos(l, n)}$; qu'enfin on puisse les distribuer en familles dépendant chacune de deux paramètres a, b et telles que, si s désigne l'arc décrit sur une corde quelconque de la famille le module de

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, s)}$$

reste supérieur à un nombre déterminé. Dans ces conditions, les raisonnements du n° 19, resteront valables.

22. — Combinons maintenant l'inégalité (**16**) avec l'inégalité précédemment obtenue (**15**) (n° 18) ; il vient

$$G < \frac{\lambda J}{S},$$

$$\Delta < \frac{\lambda^2 J}{S}.$$

Ce sont les inégalités que nous avions en vue.

On peut remarquer que ces inégalités donnent une limite supérieure de l'intégrale

$$I = \int\int\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau,$$

(dans laquelle on désigne par Φ une fonction donnée quelconque).

puisque, toujours d'après l'inégalité de M. Schwarz, on a :

$$I^2 < G \int\int\int \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

$$< \lambda \frac{J}{S} \int\int\int \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

23. — Les inégalités auxquelles nous sommes parvenus à l'aide de la méthode de Neumann jouent, relativement au deuxième problème aux limites, le même rôle que remplissent, par rapport au problème de Dirichlet, les propositions rappelées au n° 1 ; mais elles sont loin de fournir, pour l'oscillation de la fonction cherchée et les modules de ses dérivées, des limites aussi précises que les premières. Elles ne pourraient, par exemple, servir à constituer, pour le problème de Neumann, des méthodes *alternées* semblables à celles que l'on emploie dans la résolution du problème de Dirichlet. Nous savons qu'il existe un nombre auquel reste inférieur le rapport de l'oscillation de V au module maximum de $\frac{dV}{dn}$; mais l'existence même de ce nombre est tout ce que nous connaissons à son égard.

Cette absence de données précises sur le coefficient dont nous venons de parler est une des principales lacunes de nos connaissances sur le deuxième problème aux limites.

§ 5. — FONCTIONS DE Fr. NEUMANN ET DE KLEIN.

24. — Les considérations exposées au § 4 démontrent l'existence de la solution, mais n'en fournissent aucune expression simple.

Nous allons constater qu'on pourrait écrire de telles expressions si l'on savait construire, pour le deuxième problème aux limites, des fonctions analogues à la fonction de Green, dont on connaît le rôle essentiel dans la théorie du problème de Dirichlet.

Comme la fonction de Green, les fonctions γ_A^M que nous considérerons seront harmoniques dans le domaine donné, sauf en un point A choisi arbitrairement, où elles deviendront infinies (dans le cas de trois dimentions) comme l'inverse de la quantité $r = AM$.

De telles fonctions ne satisferont pas, s'il s'agit d'un domaine intérieur, à l'équation (1) du n° 1. Cette équation n'est vraie que si l'on adjoint à la surface limite donnée S, la surface d'une petite sphère Σ ayant A pour centre. Or, lorsque le rayon de cette sphère devient infiniment petit, l'intégrale $\int\int_{\Sigma} \frac{d\gamma_A}{dn} d\Sigma$ tend vers 4π, puisque γ_A se réduit alors à son terme principal $\frac{1}{r}$. Sur S, l'équation (1) du n° 1 doit donc être remplacée par la formule suivante

$$\int\int \frac{d\gamma_A^M}{dn} dS = 4\pi. \tag{17}$$

1° *Fonction de Franz Neumann.* — *Problème extérieur.* Soit γ_A^M une fonction des coordonnées du point M, harmonique dans le domaine donné, sauf au point A, ayant une dérivée normale nulle sur la surface, et devenant infinie en A comme $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire telle que $\gamma_A - \frac{1}{r}$ reste harmonique en A. La détermination d'une telle fonction est évidemment un cas particulier du deuxième problème aux limites. Mais elle suffira à résoudre ce même problème dans le cas général. V étant une fonction harmonique satisfaisant aux conditions du problème, autrement dit, telle que, sur S, $\frac{dV}{dn} = F$, il suffit de raisonner sur V et sur γ_A^M comme dans la théorie de la fonction de Green pour obtenir

$$V_A = -\frac{1}{4\pi}\int\int \gamma_A^M F\,dS. \tag{E}$$

Problème intérieur. — On ne peut plus, en vertu de l'équation (17), prendre

$$\frac{d\gamma_A^M}{dn} = 0$$

sur la surface ; nous allons seulement prendre cette dérivée constante. On aura alors évidemment

$$\frac{d\gamma_A^M}{dn} = \frac{4\pi}{S}. \tag{17}$$

En appliquant encore le théorème de Green aux fonctions V et γ_A^M, il vient, cette fois,

$$V_A = -\frac{1}{4\pi}\int\int \gamma_A^M F\, d\sigma - \frac{1}{S}\int\int V\, d\sigma.$$

Mais nous ne cherchons V_A qu'à une constante additive près, c'est-à-dire que nous ne cherchons que la différence $V_A - V_{A'}$, A′ étant un point origine quelconque. Nous pouvons donc négliger le terme complémentaire qui est le même pour tous les points.

25. — 2° *Fonction de Klein.* — Dans le cas du problème intérieur, la fonction γ_A^M de Fr. Neumann n'est elle-même déterminée qu'à une constante additive près. Ce fait constitue un inconvénient à divers points de vue. C'est ainsi qu'il ne semble pas possible, dans ces conditions, d'établir, pour la fonction γ_A^M, une propriété de symétrie analogue à la relation bien connue

(18) $$g_A^M = g_M^A$$

à laquelle donne lieu la fonction de Green classique.

Pour obvier à cet inconvénient, M. Klein [1] a été conduit à former une fonction possédant, non un seul pôle, mais deux pôles de signes contraires. Une telle fonction satisfait à l'équation (1) du n° **4**. Rien ne s'oppose donc à ce que sa dérivée normale sur la surface soit partout nulle. La fonction de Klein est donc définie par cette condition et par les suivantes : être harmonique dans le domaine donné, sauf en deux points A et A_0 ; être telle aux environs de A que sa différence avec $\frac{1}{r}$ reste harmonique ; aux environs de A_0 que sa différence avec $-\frac{1}{r_0} = -\frac{1}{MA_0}$ reste harmonique ; enfin s'annuler en un point donné M_0. La valeur d'une telle fonction en un point M du domaine s'écrit

$$\Gamma_{AA_0}^{MM_0}.$$

[1] In Pockels, *Über die partielle Differentialgleichung* $\Delta u + K^2 u = 0$ *und deren Auftreten in der Mathematischen Physik* ; Leipzig, 1891.

C'est, en réalité, l'accroissement que subit de M_0 à M toute fonction satisfaisant à toutes les mêmes conditions, sauf à la dernière.

La fonction $\Gamma^{MM_0}_{AA_0}$ permet, comme la fonction de Fr. Neumann, de résoudre le problème posé, puisque l'on a, d'après le théorème de Green :

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \Gamma^{MM_0}_{AA_0} F_M dS_M = V_A - V_{A_0}.$$

La constante arbitraire qui s'ajoute à la valeur de V_A est ici $-V_{A_0}$.

D'autre part, comme $\Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2}$ représente l'accroissement d'une fonction entre les points A_2 et A_1, on peut écrire :

$$\Gamma^{M_1M_3}_{A_1A_2} = \Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2} + \Gamma^{M_2M_3}_{A_1A_2}$$

et en particulier :

$$\Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2} = -\Gamma^{M_2M_1}_{A_1A_2}.$$

On pourra faire les mêmes opérations sur les indices inférieurs :

$$\Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_3} = \Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2} + \Gamma^{M_1M_2}_{A_2A_3},$$

comme on le voit immédiatement en se reportant à la définition du symbole Γ. En particulier :

$$\Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2} = -\Gamma^{M_1M_2}_{A_2A_1},$$

Je dis qu'on a en outre :

19 $$\Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2} = \Gamma^{A_1A_2}_{M_1M_2},$$

c'est-à-dire la propriété analogue à la propriété de la fonction de Green.

En effet, posant, pour abréger

$$\Gamma_M = \Gamma^{MM_2}_{A_1A_2}$$
$$\Gamma'_M = \Gamma^{MA_2}_{M_1M_2}$$

on a, d'après le théorème de Green :

$$\int\int \left(\Gamma\frac{d\Gamma'}{dn} - \Gamma'\frac{d\Gamma}{dn}\right) dS = 4\pi\left(\Gamma^{M_1M_2}_{A_1A_2} - \Gamma^{A_1A_2}_{M_1M_2}\right).$$

Mais le premier membre est nul ; l'égalité est donc démontrée.

26. — Ainsi que nous allons le voir, il n'est nullement nécessaire d'abandonner la fonction de Fr. Neumann pour conserver la propriété de symétrie. Il suffit d'en compléter la définition.

La fonction γ_A^M n'est, en effet, définie qu'à une quantité additive près, laquelle ne dépend pas du point M, mais est fonction de la position du point A. Nous allons constater qu'il suffit de déterminer convenablement la quantité additive en question pour que la fonction de Neumann possède la propriété demandée. Tout d'abord, on peut passer facilement de la fonction de Neumann à celle de Klein.

On a, en effet,

$$\Gamma_{A_1A_2}^{M_1M_2} = \gamma_{A_1}^{M_1} - \gamma_{A_2}^{M_1} - \gamma_{A_1}^{M_2} + \gamma_{A_2}^{M_2}$$

car le second membre possède les propriétés qui caractérisent le symbole

$$\Gamma_{A_1A_2}^{M_1M_2}.$$

Il résulte de là qu'une propriété tout analogue à celles qu'expriment les équations (**18**), (**19**) appartient également au symbole de Neumann, pourvu qu'on détermine convenablement le paramètre arbitraire, fonction du point A, qui figure dans ce dernier. L'équation (**19**) s'écrit, en effet, d'après la relation précédente :

$$\gamma_{A_1}^{M_1} - \gamma_{A_2}^{M_1} - \gamma_{A_1}^{M_2} + \gamma_{A_2}^{M_2} = \gamma_{M_1}^{A_1} - \gamma_{M_2}^{A_1} - \gamma_{M_1}^{A_2} + \gamma_{M_2}^{A_2},$$

d'où, en posant

(20) $$\gamma_A^M - \gamma_M^A = \varphi(A, M) :$$

$$\varphi(A_1, M_1) - \varphi(A_1, M_2) - \varphi(A_2, M_1) + \varphi(A_2, M_2) = 0,$$

relation fonctionnelle à laquelle doit satisfaire la fonction φ et dont la solution générale est, ainsi qu'on le voit aisément :

$$\varphi(A, M) = \psi(A) - \psi_1(M).$$

Il est d'ailleurs clair, en vertu de l'équation (**20**), que les fonctions ψ et ψ_1 doivent être identiques.

On peut dès lors choisir les fonctions γ telles que la fonction φ soit toujours nulle : il suffit de remplacer γ_A^M par $\gamma'^M_A = \gamma_A^M - \psi(A)$.

La fonction $\psi(A)$ peut d'ailleurs être déterminée directement de manière

à annuler φ. Je dis en effet qu'il suffit pour cela de calculer en chaque point A la constante $\psi(A)$ par la condition

$$\iint_S \gamma'^M_A \, dS_M = \iint_S \left[\gamma^M_A - \psi(A) \right] dS_M$$
$$= \iint_S \gamma^M_A \, dS_M - S\psi(A) = K,$$

K étant une constante choisie une fois pour toutes, mais arbitrairement (on pourra, par exemple, prendre $K = 0$).

On aura bien alors, en effet,

$$\iint_S \left(\gamma'^M_A \frac{d\gamma'^M_B}{dn} - \gamma'^M_B \frac{d\gamma'^M_A}{dn} \right) dS_M = 0$$

et, par conséquent, en appliquant le théorème de Green aux fonctions γ'^M_A et γ'^M_B, on obtient la relation cherchée

$$(21) \qquad \gamma'^B_A = \gamma'^A_B.$$

Réciproquement, si cette relation a lieu pour tous les couples de points (A, B), on a

$$(22) \qquad \iint \gamma^M_A \, dS_M = K,$$

K étant une constante indépendante de A.

27. — On sait que l'usage de la fonction de Green permet de résoudre non seulement le problème de Dirichlet, mais aussi le problème généralisé relatif à l'équation

$$(2) \qquad \Delta V = f(x, y, z),$$

f étant une fonction donnée en chaque point du domaine D envisagé.

Pareille remarque s'applique à la question actuelle. Soient données d'une part, l'équation (2) et, d'autre part, la condition à la surface

$$(23) \qquad \frac{dV}{dn} = F,$$

la condition (1) du n° 4, pour le problème intérieur étant remplacée par

$$\text{24)} \qquad \iiint_D f(x, y, z)\, d\tau + \iint_S F\, dS = 0.$$

En appliquant le théorème de Green à la fonction V et à la fonction de Neumann γ_A^M, il viendra

$$\text{25)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & 4\pi V_A + \iiint_D \gamma_A^M f\, d\tau + \iint_S \gamma_A^M F\, dS \\ & \qquad - C \iint V\, dS = 0, \end{aligned} \right.$$

C étant égal à zéro s'il s'agit du problème extérieur, et à la constante $\frac{4\pi}{S}$ (d'après l'équation (17')), s'il s'agit du problème intérieur. Dans les deux cas, le terme $C \iint V dS$ peut être laissé de côté, soit parce qu'il est nul, soit parce qu'il est constant.

§ 6. — CAS DE LA SPHÈRE [1]

28. — Après avoir établi l'existence de la solution du deuxième problème aux limites et montré comment son expression se ramène à la recherche de la fonction de Fr. Neumann, il nous reste à indiquer les cas où cette solution peut être obtenue effectivement, par exemple où la fonction de Neumann est connue. Mais ces cas sont en très petit nombre.

Une méthode générale par laquelle on peut se proposer d'exprimer la solution cherchée consiste à la représenter par une série de la forme

$$A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \dots + A_m \Phi_m + \dots$$

où les Φ sont des fonctions harmoniques déterminées, les A étant des coefficients arbitraires. Il est clair qu'on obtiendra une telle représentation si l'on peut mettre les valeurs données de la dérivée normale sous la forme

$$A_0 \frac{d\Phi_0}{dn} + A_1 \frac{d\Phi_1}{dn} + \dots + A_m \frac{d\Phi_m}{dn} + \dots$$

[1] Dini, *loc. cit.*

C'est ce que l'on pourra souvent réaliser en prenant pour les Φ les *fonctions fondamentales* introduites par MM. Poincaré, Le Roy, Stekloff, etc.

29. — Cette méthode conduit immédiatement à la solution dans le cas de la sphère. On sait que toute fonction donnée sur cette surface peut être développée en série de fonctions sphériques, pourvu qu'elle soit continue et satisfasse aux conditions de Dirichlet sur tout grand cercle.

Cela posé, supposons d'abord qu'il s'agisse du problème intérieur. Nous avons à trouver la fonction V, connaissant $\frac{dV}{dn}$, qui satisfait à la relation

$$(1) \qquad \int\int \frac{dV}{dn} dS = 0$$

Nous nous donnerons V sous forme d'une série de polynômes sphériques

$$V = Y_0 + \rho Y_1 + \rho^2 Y_2 + \dots.$$

On en déduit :

$$(26) \qquad \frac{dV}{dn} = -(Y_1 + 2RY_2 + \dots + mR^{m-1} Y_m + \dots).$$

Il suffit donc de développer $\frac{dV}{dn}$ en série de fonctions de Laplace

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_m + \dots$$

Il ne doit pas y avoir de terme en Y_0 : c'est précisément là la condition de possibilité (1) du problème. Il n'y aura plus qu'à poser

$$Y_m = -\frac{\Phi_m}{mR^{m-1}}$$

Lors même que la fonction $\frac{dV}{dn}$, ne satisfaisant pas aux conditions de Dirichlet, ne pourrait pas être développée en série de fonctions sphériques, on pourrait [1], pourvu qu'elle soit continue ou même finie avec discontinuités isolées, la développer en une série dont chaque terme serait une *somme* de fonctions sphériques (de degrés différents entre eux, en général) et raisonner sur cette série comme sur la série (25) [2].

---

[1] Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 248 et suiv.

[2] Cf. Le Roy, Thèse *Sur l'intégration des équations de la chaleur*, p. 28-30.

On aurait de même pour le problème extérieur

$$V = \frac{Y_0}{\rho} + \frac{Y_1}{\rho^2} + \dots + \frac{Y_m}{\rho^{m+1}}$$

et on déterminerait les Y d'une manière analogue à la précédente.

29 *bis*. — **Cas de deux sphères concentriques.** — La même méthode s'applique à l'espace compris entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ; on posera [1] ici

$$V = Y_0 + Y_1\rho + \dots + Y_m\rho^m + \dots$$
$$+ \frac{Y'_0}{\rho} + \frac{Y'_1}{\rho^2} + \dots + \frac{Y'_m}{\rho^{m+1}} + \dots$$

On déterminera simultanément Y_m et Y'_m par deux équations

$$mR_1^{m-1}\,Y_m - \frac{(m+1)\,Y'_m}{R_1^{m+2}} = \Phi_m$$
$$-\,mR_2^{m-1}\,Y_m + \frac{(m+1)\,Y'_m}{R_2^{m+2}} = \Phi'_m$$

dont le déterminant est différent de zéro, pour $m > 0$. Pour $m = 0$, les deux équations seront encore compatibles moyennant la condition de possibilité (1).

30. — Dans les deux problèmes que nous venons de traiter, la solution peut être obtenue sans recourir aux séries. Nous allons faire voir que, soit dans le cas d'une sphère, soit dans celui de deux sphères concentriques, on peut ramener le problème de Neumann au problème de Dirichlet et à des quadratures.

Cas d'une seule sphère. — Soit D le domaine intérieur (ou extérieur), limité par la sphère S. Soit D' le domaine limité par la sphère S' obtenue en augmentant (ou diminuant) de dR le rayon R de S.

Si V est la fonction cherchée, on pourra en déduire par simple homothétie une fonction V' harmonique dans le domaine D' et prenant en les différents points de S' les valeurs que prend V en les points correspondants

[1] Dans le cas où les valeurs données de la dérivée normale ne satisferaient pas aux conditions de Dirichlet, on appliquerait la même modification qu'au n° précédent.

de S. La différence $V - V'$ sera harmonique dans D. Mais elle prendra sur S la valeur $-\frac{dV}{dn}dR$. Si donc on pose

$$V_1 = \frac{V - V'}{dR}$$

on saura calculer V_1 puisqu'on sait résoudre le premier problème aux limites.

C'est cette fonction V_1 qui va nous servir à calculer V.

Autrement dit, et plus rigoureusement : $V(x, y, z)$ étant harmonique, il en est de même de $V(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, où λ est une constante arbitraire. Il en est donc de même aussi de $\frac{\partial}{\partial \lambda} V(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, c'est-à-dire, pour $\lambda = 1$, de

$$(27) \qquad V_1 = x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = \delta\frac{\partial V}{\partial \delta}$$

δ étant la distance au centre.

De fait, on voit directement qu'on a

$$(28) \quad \Delta\left(x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2\right)\Delta V.$$

V_1 étant calculée, on déduira V de l'équation (27), par l'intégrale rectiligne suivante, prise sur le rayon OM

$$(29) \qquad V = \int_0^{OM} \frac{V_1}{\delta} d\delta + C^{te} \qquad \text{(problème intérieur)}$$

$$(30) \qquad V = -\int_{OM}^{\infty} \frac{V_1}{\delta} d\delta \qquad \text{(problème extérieur)}.$$

L'intégrale a un sens dans le cas du problème intérieur, car la condition

$$V_1 = 0$$

au centre de la sphère n'est autre, d'après le théorème de Gauss, que celle de possibilité du problème

$$(1) \qquad \int\int_S \frac{dV}{dn} dS = 0.$$

L'intégrale a également un sens dans le cas du problème extérieur, car V_1 a été calculée comme fonction régulière à l'infini.

Si V_1 est une fonction régulière à l'origine et s'y annulant, il en sera de même de

$$V = \int_0^{OM} \frac{V_1}{\delta} d\delta,$$

ainsi qu'on le voit en remplaçant V_1 par son développement en série de Maclaurin.

De plus, si V_1 est harmonique, V le sera aussi ; car, en vertu de l'équation (**28**), ΔV_1 étant nul, si ΔV n'était pas identiquement nul, il devrait être une fonction homogène de degré -2, ce qui est absurde, ΔV étant régulier à l'origine. On vérifierait d'ailleurs le même fait d'après l'expression de V sous forme d'intégrale définie. Cette dernière manière d'opérer s'applique, de plus, à l'expression (**30**), pour laquelle le premier raisonnement serait en défaut.

Sur la sphère de rayon R, la fonction V_1 prend évidemment les mêmes valeurs que la quantité $-R\frac{dV}{dn}$, dans le cas du problème intérieur et que $+R\frac{dV}{dn}$, dans le cas du problème extérieur. On pourra donc en obtenir l'expression par la résolution du problème de Dirichlet. D'après les formules connues pour la résolution de ce problème sur la sphère, on aura

$$V_1 = \mp \frac{R}{2\pi} \int\int_S \frac{dV}{dn} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{1}{4\pi} \int\int_S \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} dS$$

(le signe $-$ devant la première intégrale se rapportant au problème intérieur, le signe $+$ au problème extérieur). On en déduirait, pour le problème intérieur, par exemple

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} V = & -\frac{R}{2\pi} \int\int_S \frac{dV}{dn} dS \int_0^\rho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \frac{d\delta}{\delta} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int\int_S \frac{dV}{dn} dS \int_0^\rho \frac{1}{r} \frac{d\delta}{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Les quadratures simples s'effectuent sans difficulté. On est d'ailleurs

conduit à ces mêmes quadratures en cherchant, ainsi que nous allons le faire, la fonction de Neumann.

31. — Fonction de Neumann. — Cherchons la fonction de Neumann relative au problème intérieur dans les cas de la sphère. Il s'agit de trouver une fonction γ_A^M harmonique dans toute la sphère, sauf aux environs de A, et telle que $\frac{d\gamma}{dn}$ soit constant le long de la surface limite.

Posant

$$\gamma_A^M = \frac{1}{r} + H, \tag{32}$$

H doit être partout harmonique et sa dérivée normale doit satisfaire à l'équation

$$\frac{dH}{dn} = K - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \tag{33}$$

Nous pouvons appliquer à ce cas particulier du problème précédent la méthode que nous venons d'indiquer pour sa solution, et diriger les calculs de manière à déduire la fonction de Neumann de l'expression connue de la fonction de Green.

Soient ρ la distance OM, δ la distance OA, γ l'angle que ces deux droites font entres elles. L'application de la méthode précédente nous conduit tout d'abord à chercher une fonction harmonique $H_1 = \rho\frac{\partial H}{\partial\rho}$ prenant sur la surface les mêmes valeurs, au facteur — R près, que le second membre de l'équation (33), c'est-à-dire que la quantité

$$K - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}.$$

Or la fonction $\frac{1}{r}$ est homogène et de degré — 1 par rapport à ρ et à δ et l'on a, par conséquent

$$\rho\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\rho} + \delta\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\delta} = -\frac{1}{r}, \tag{34}$$

d'où, pour $\rho = R$,

$$H_1 = -R\frac{dH}{dn} = -KR - \delta\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\delta} - \frac{1}{r}. \tag{35}$$

Soit maintenant

$$g_A^M = \frac{1}{r} - h_A^M$$

la fonction de Green relative au problème intérieur de Dirichlet pour notre sphère. On a, lorsque le point M est sur la surface de celle-ci,

$$h = \frac{1}{r}$$

et cette égalité, ayant lieu quelque soit le point A, peut-être différentiée par rapport à δ. On a donc

$$(36) \qquad H_1 = -KR + h + \delta \frac{\partial h}{\partial \delta}.$$

Cette équation a lieu à la surface et par conséquent, dans tout le volume, puisque les deux membres représentent des fonctions harmoniques. Quant à h, on sait qu'il s'obtient en considérant le point A′, image de A (fig. 3) situé sur le rayon OA à une distance du centre $OA' = \delta' = \frac{R^2}{\delta}$. En désignant par r' la distance MA′, on a

$$(37) \qquad h = \frac{R}{\delta r'}$$

Considérée comme fonction de ρ, γ et δ', cette quantité h est homogène et de degré 0 (puisque $\frac{1}{r'}$ est de degré -1 et $\frac{1}{\delta}$ de degré $+1$) de sorte qu'on a

$$(38) \qquad \delta' \frac{\partial h}{\partial \delta'} = -\delta \frac{\partial h}{\partial \delta} = -\rho \frac{\partial h}{\partial \rho}.$$

La fonction H_1 étant déterminée par la formule (36), il nous reste à calculer H par l'équation

$$H_1 = \rho \frac{\partial H}{\partial \rho}.$$

Si l'on tient compte de l'identité (38), on voit qu'on aura

$$(39) \qquad H = h + \int_0^\rho \left(\frac{R}{\delta r'} - KR\right) \frac{d\rho}{\rho}$$

La constante K est choisie, ainsi que nous l'avons vu, de manière à ce

que l'intégrale ait un sens, c'est-à-dire de manière à annuler le coefficient de $\frac{d\rho}{\rho}$: il faut donc prendre $K = \frac{1}{R^2}$.

On effectuera simplement la quadrature en introduisant l'angle $OA'M = \psi$, qui donne

$$\rho = \frac{\delta' \sin \psi}{\sin(\gamma + \psi)}, \qquad r' = \frac{\delta' \sin \gamma}{\sin(\gamma + \psi)}$$

et, par suite

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\rho} \left(\frac{R}{\delta r} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho}{\rho} \\ & = \int_0^{\psi} \frac{1}{R} \left[\frac{\sin(\gamma + \psi)}{\sin \gamma} \left(\operatorname{cotg} \psi - \operatorname{cotg}(\gamma + \psi) \right) d\psi - \frac{d\rho}{\rho} \right] \\ & = \int_0^{\psi} \frac{1}{R} \left(\frac{d\psi}{\sin \psi} - \frac{d\rho}{\rho} \right) = \frac{1}{R} \log \frac{2R^2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\rho\delta \sin \gamma}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (32), (39), (40) nous donnent

$$(41) \qquad \gamma_A^M = \frac{1}{r} + \frac{R}{\delta r} - \frac{1}{R} \log \frac{2R^2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\rho\delta \sin \gamma}.$$

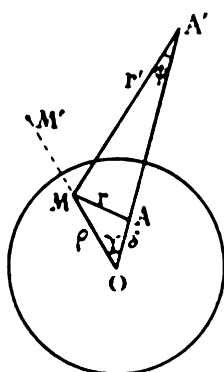


Fig. 3

La quantité ainsi obtenue est, conformément à nos conclusions générales, symétrique par rapport aux deux points A, M dont elle dépend. Cette propriété appartient en effet, ainsi qu'il est bien connu, au second terme $\frac{R}{\delta r}$ de la formule précédente. Elle appartient également à l'angle ψ qui figure dans le troisième terme, car, si l'on appelle M' l'image du point M, les deux triangles OAM, OAM' sont, comme on sait, semblables entre eux et au triangle qui aurait un angle égal à γ compris entre deux côtés mesurés respectivement par R^2 et $\rho\delta$.

En tenant compte des relations trigonométriques

fournies par le triangle OA'M, on peut aisément écrire le dernier terme sous la forme

$$\frac{1}{R}\log\frac{2\delta'}{r'+\delta'-\rho\cos\gamma}=\frac{1}{R}\log\frac{2.\overline{OM'}}{\overline{AM'}+\overline{OM'}-\delta\cos\gamma},$$

(en permutant les points A et M).

Lorsque le point M est sur la sphère, la valeur de γ_M^A se réduit à

$$\frac{2}{r}-\frac{1}{R}\log\frac{r+R-\delta\cos\gamma}{2R},$$

valeur obtenue (à une constante près) par Fr. Neumann [1] par sommation d'une série de fonctions sphériques et qu'il suffira de substituer dans la formule (E) du n° 24.

Si enfin, au lieu du problème intérieur, on avait affaire au problème extérieur, les égalités (35) et (36) subsisteraient en faisant $K=0$; la formule (39) devrait être remplacée par

$$H=h-\int_\rho^\infty\frac{R}{\delta r'}\frac{d\rho}{\rho},$$

e l'on aurait finalement

41' $$\gamma_A^M=\frac{1}{r}+\frac{R}{\delta r'}+\frac{1}{R}\log\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

32. — Essayons encore d'appliquer la même méthode au cas de *deux sphères concentriques*. Soient φ_1 les valeurs données de la dérivée normale sur la sphère intérieure S_1 (de rayon R_1); φ_2, ces mêmes valeurs sur la sphère extérieure S_2, de rayon R_2. On suppose, bien entendu, vérifiée la condition de possibilité

42 $$\iint_{S_1}\varphi_1\,dS+\iint_{S_2}\varphi_2\,dS=0.$$

---

(1) *Vorles., über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen*, p. 275. Quant aux valeurs intérieure et extérieure de la fonction γ_A^M, elles sont dues à Bjerknes (*loc. cit.*, 1871) et à Beltrami (*loc. cit.*, tome III, p. 370-371; 1873.)

Considérons encore la fonction auxiliaire

$$V_1 = x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = \rho\frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Cette fonction prendra les valeurs $R_1\varphi_1$ sur la sphère intérieure, — sur la sphère extérieure. La résolution du problème de Dirichlet la donc connaître. Si dès lors on se donne les valeurs V_0 de V sur une sp concentrique S_0 intermédiaire ou coïncidant avec l'une des deux spl limites, on aura :

$$V = V_0 + \int_{M_0}^{M} V_1 \frac{d\rho}{\rho},$$

les points M_0 et M étant pris sur un même rayon.

On ne peut évidemment pas prendre les valeurs V_0 de V sur la sp S_0 d'une manière arbitraire. Ces valeurs seront déterminées par la dition que l'on ait, dans l'espace donné,

$$\Delta V \quad 0$$

Or, de la condition $\Delta V_1 = 0$, résulte déjà, d'après l'identité (28), ΔV est forcément une fonction homogène de degré — 2.

Il sera donc nécessaire et suffisant de s'assurer que ΔV est nul sur Soient ρ, θ, φ des coordonnées polaires. On a :

$$(43)\qquad \Delta V \quad \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]$$

et ici :

$$\Delta V = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_1) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right] = 0.$$

Le premier terme est donc connu et l'on connaît par conséquent somme des deux autres.

33. — La somme de ces deux autres termes n'est autre que le *pa mètre différentiel du second ordre* relatif à la sphère.

Soit, d'une manière générale,

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'élément linéaire d'une surface.

On sait que l'on nomme *paramètre différentiel du premier ordre* d'une fonction quelconque V, la quantité

$$\Delta_1 V = \frac{G\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + E\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2}$$

et *paramètre différentiel du second ordre*, la quantité :

$$(44) \quad \Delta_2 V = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{H}\right) + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{H}\right)$$

où $H = \sqrt{EG - F^2}$ satisfait à l'identité

$$dS = H du dv.$$

(Voir Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre VII, chap. I).

Si $\Delta_1(V, W)$ est la forme polaire de $\Delta_1(V)$, on a une formule analogue à celle de Green :

$$(45) \quad \int \Delta_1(V, W)\, dS + \int W \frac{\partial V}{\partial n}\, \partial S + \int W\Delta_2 V\, dS = 0,$$

les intégrales doubles étant étendues à un certain domaine pris sur la surface, et l'intégrale simple étant prise le long du contour de ce domaine.

Si les fonctions V et W sont régulières sur toute la surface S, celle-ci étant fermée, on peut supposer que le domaine d'intégration comprenne toute la surface : l'intégrale simple disparaît alors.

On déduit de là qu'il n'y a pas de fonction régulière et non nulle qui satisfasse soit à l'équation $\Delta_2 V = 0$, soit à l'équation

$$(46) \quad \Delta_2 V = C^{te}$$

sur toute la surface.

34. — Le paramètre du second ordre $\Delta_2 V$ peut encore être défini géométriquement de la manière suivante : par le point M considéré de la surface, faisons passer deux géodésiques rectangulaires, — ou encore, deux sections normales rectangulaires, — et sur chacune de ces lignes, considérons la dérivée seconde $\frac{d^2V}{ds^2}$, où s est l'arc de courbe. La somme $\frac{d^2V}{ds_1^2} + \frac{d^2V}{ds_2^2}$ des valeurs de $\frac{d^2V}{ds^2}$ sur les deux géodésiques ou sections normales ne variera

pas, lorsque celles-ci tourneront autour du point M, en restant rectangulaires entre elles, et sera précisément égale à $\Delta_2 V$.

Il est aisé de déduire de là la relation qui existe entre le paramètre $\Delta^2 V$ et le symbole ΔV relatif à l'espace, relation dont l'identité (43) n'est qu'un cas particulier. Il suffit de rapporter celui-ci à trois axes rectangulaires dont l'un sera la normale Mn à la surface, les deux autres Mx_1, Mx_2 étant tangents respectivement à nos deux sections normales. R_1 et R_2 étant les rayons de courbure de celle-ci, comptés comme positifs dans le sens Mn, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{d^2 V}{ds_1^2} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial V}{\partial n}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = \frac{d^2 V}{ds_2^2} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial V}{\partial n},$$

et par conséquent,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = \Delta_2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n}.$$

35. — L'équation que nous allons avoir à intégrer est de la forme

$$(47) \qquad \Delta_2 V = f$$

f étant une fonction donnée en tout point de la surface. Ce problème n'est d'ailleurs possible (V étant une fonction partout régulière) que si l'on a

$$(48) \qquad \iint_S f\, dS = 0,$$

ainsi que le montre, pour $W = 1$, l'équation (45) étendue à toute la surface. S'il est possible, il n'a qu'une seule solution, ainsi qu'il ressort de ce que nous venons de dire sur l'équation $\Delta_2 V = 0$.

Pour intégrer l'équation (47), on se servira de fonctions analogues à la fonction de Green dans le plan, c'est-à dire ayant des points singuliers logarithmiques. Il n'existe pas de fonction ayant un seul point singulier logarithmique et satisfaisant à l'équation $\Delta_2 V = 0$. Mais on peut, soit considérer, avec M. Picard, une fonction satisfaisant à cette équation et ayant *deux* points singuliers (comme la fonction de M. Klein, considérée au n° **25**), soit une fonction satisfaisant à l'équation (46) et ayant un seul point singulier A, autrement dit régulière partout sauf au point A, et

infinie en A comme $\log \frac{1}{r}$, r étant la distance géodésique à A. Soit g_A^M une telle fonction :

$$g_A^M = \frac{1}{r} + H$$

où H est une fonction régulière sur toute la surface. Prenant, dans la formule (**45**),

$$W = 1$$
$$V = g_A^M$$

on a

$$\int\int \Delta_2 g_A^M \, dS + \int \frac{dg_A^M}{dn} \, ds = 0.$$

Si l'on étend l'intégration à toute la surface, moins un petit cercle entourant le point A, l'intégrale simple se réduit à -2π et il vient

$$KS + 2\pi = 0$$

K étant la valeur constante de $\Delta_2 g_A^M$, qui se trouve ainsi déterminée. Comme précédemment, on peut disposer de la fonction de A qui reste arbitraire dans la définition de g_A^M de manière que

(**49**) $$g_A^M = g_M^A.$$

Il suffit pour cela, d'imposer à g la condition

$$\int\int_S g_A^M \, dS_M = c,$$

c étant une constante indépendante du point A (par exemple, $c = 0$).

g_A^M étant connu, la solution de l'équation (**47**) s'obtiendra en appliquant la formule (**45**) (étendue à toute la surface, moins une petite courbe circulaire entourant le point A) aux fonctions V et g_A^M. Il vient ainsi

(**50**) $$2\pi V_A = -\int\int_S f_M \, g_A^M \, dS_M + C^{te}.$$

On démontrerait ici aisément que la valeur ainsi trouvée de V répond à la question, puisque la difficulté résultant des conditions aux limites

n'existe pas ici. Il suffit de remarquer, d'une part que la fonction g_A^M, en vertu de la relation de symétrie (49), satisfait encore à l'équation (46) quand on la considère comme fonction du point A ; d'autre part que l'expression sous le signe $\int\int$ dans la formule (50), étant irrégulière à la façon d'un potentiel logarithmique, la différentiation sous le signe $\int\int$ est légitime pour former le symbole Δ_2, à la condition d'ajouter au résultat la quantité $-2\pi f_A$. Or le résultat de cette différentiation sous le signe $\int\int$ est nul, en vertu de la condition (48).

Sur la sphère, la fonction g_A^M s'obtient aisément. D'après la formule (43), l'équation (46) s'écrira

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}=\text{C}^{\text{te}}.$$

Si l'on prend pour point $\theta=0$ le point A, g sera évidemment indépendant de φ ; et dans ces conditions, l'équation précédente admet (à une constante additive et à un facteur constant près) une seule solution régulière pour $\theta=\pi$, savoir

$$(51)\qquad g=-\log\sin\frac{\theta}{2}.$$

36. — Revenons maintenant au problème posé. Il nous reste à déterminer sur une sphère S_0, une fonction régulière V_0 satisfaisant à la condition

$$\Delta^2 V_0=-\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho V_1).$$

D'après les formules (50) et (51), cette fonction sera

$$2\pi\, V_0=\int\int\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho V_1)\log\sin\frac{\theta}{2}\,dS+\text{C}^{\text{te}},$$

ce qui achève de déterminer la solution du problème. Il faut toutefois nous assurer que l'on a la condition de possibilité (48), soit ici

$$(52)\qquad \int\int\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho V_1)\,dS=0.$$

Mais cette condition résultera de la condition

$$(42) \qquad \int\int_{S_1} \varphi_1 dS_1 + \int\int_{S_2} \varphi_2 dS_2 = 0.$$

Il suffit en effet de montrer que la relation (52) sera vérifiée sur une sphère intermédiaire S_0 au moins.

Or on a, $d\omega$ étant l'élément de sphère de rayon 1 qui correspond à l'élément dS_1 ou dS_2

$$\varphi_1\, dS_1 = \frac{V_1}{\rho_1}\, dS_1 = V_1\rho_1\, d\omega,$$

$$\varphi_2\, dS_2 = -\frac{V_1}{\rho_2}\, dS_2 = -V_1\rho_2\, d\omega.$$

Donc l'intégrale $\int\int_S V_1\rho d\omega$, étendue à la sphère de rayon ρ, prend la même valeur pour $\rho = \rho_1$ et pour $\rho = \rho_2$. Sa dérivée par rapport à ρ s'annule donc au moins pour une valeur ρ_0 de ρ comprise entre ρ_1 et ρ_2, de sorte qu'on peut prendre pour S_0 la sphère de rayon ρ_0 (¹).

37. — On peut se demander si des considérations analogues à celles que nous avons présentées pour la sphère ne permettraient pas de résoudre le deuxième problème aux limites pour d'autres surfaces. La réponse est négative, au moins pour la méthode telle que nous l'avons développée. Soient, en effet, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à une surface fermée S et supposons encore qu'on connaisse, en tout point de S, la quantité

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Il faudrait, pour imiter la marche suivie dans le cas de la sphère, connaître trois fonctions X, Y, Z, proportionnelles, sur la surface S, à α, β, γ et telles que l'équation $\Delta V = 0$ entraîne

$$(53) \qquad \Delta\left(X \frac{\partial V}{\partial x} + Y \frac{\partial V}{\partial y} + Z \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0.$$

(¹) Bien entendu, dans ces conditions l'intégrale $\int\int V_1\rho\, d\omega$ sera nulle, non seulement pour une valeur de ρ, mais pour toute valeur de ρ comprise entre ρ_1 et ρ_2. Il est d'ailleurs aisé de voir comme conséquence de l'équation $\Delta V_1 = 0$ et abstraction faite de la condition (42), que cette intégrale est une fonction linéaire de ρ.

Nous avons vu au n° 30 qu'il en était ainsi pour $X = x$, $Y = y$, $Z =$
ce fait nous est apparu comme une conséquence de celui-ci, que

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z}$$

est une transformation infinitésimale d'un certain groupe à un param
Inversement, X, Y, Z étant trois fonctions qui donnent lieu, pou
fonction harmonique, à la relation (**53**), considérons le groupe à ur
mètre qui a pour transformation infinitésimale $X \frac{\partial V}{\partial x} + Y \frac{\partial V}{\partial y} + Z \frac{\partial V}{\partial z}$
trement dit, écrivons les équations différentielles

$$\frac{dx'}{X_{(x', y', z')}} = \frac{dy'}{Y_{(x', y', z')}} = \frac{dz'}{Z_{(x', y', z')}} = d\lambda$$

et soit

$$\text{(54)} \qquad \begin{cases} x' = \xi(x, y, z, \lambda) \\ y' = \eta(x, y, z, \lambda) \\ z' = \zeta(x, y, z, \lambda) \end{cases}$$

la solution qui, pour $\lambda = 0$, se réduit à x, y, z. Le premier membre
relation (**53**) peut s'écrire $\frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta V_{(x', y', z')}$ et dans l'hypothèse où nou
plaçons, cette quantité est nulle, pour une valeur quelconque de λ
transformation (**54**) correspondante conserve l'équation $\Delta V = 0$.
Or, les conditions, pour qu'il en soit ainsi, sont :

$$\text{(55)} \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2 \\ \qquad = \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^2 \\ \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x} \\ \qquad = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

$$\text{(56} \qquad \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x'}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y'}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial z^2}$$

Donc, si la transformation $X \frac{\partial V}{\partial x} + Y \frac{\partial V}{\partial y} + Z \frac{\partial V}{\partial z}$ conserve l'équation
les dérivées par rapport à λ des premiers membres des équations **55**
doivent être nulles en même temps que ces premiers membres eux-m
— ce qu'il est aisé de vérifier directement.

Les conditions (**55**), (**56**) sont d'ailleurs vérifiées pour $\lambda = 0$, puisque x', y', z' se réduisent à x, y, z. Donc, elles sont vérifiées pour toute valeur de λ.

Mais les équations (**55**) définissent les transformations conformes de l'espace, et les équations (**56**) excluent à leur tour toute transformation autre que les déplacements et les similitudes.

Si l'on adjoint la condition que X, Y, Z soient les paramètres directeurs de la normale à une surface formée, il est aisé de voir que cette surface ne peut être autre qu'une sphère.

§ 7. — PROBLÈMES MIXTES

38. — Nous nous sommes jusqu'ici occupés du problème dans lequel la dérivée normale était donnée sur toute la surface limite. Il ne faudrait pas croire que ce problème et celui de Dirichlet dans lequel les valeurs de la fonction V elle-même sont données sur toute la frontière soient les seuls que nous puissions avoir à résoudre. Non seulement, en théorie de la chaleur, on rencontre des questions analogues dans lesquelles interviennent les valeurs de $\frac{dV}{dn} + hV$ (h étant un nombre négatif). Mais, même en Hydrodynamique, on est, en général, conduit, non au problème de Dirichlet ou à celui que nous venons de traiter, mais à un problème *mixte* dans lequel les valeurs de la fonction harmonique cherchée V sont données sur une partie de la surface et celle de sa dérivée normale sur l'autre partie ([1]).

Comme les précédents, ce problème, s'il a une solution, n'en a qu'une seule; le raisonnement classique par lequel, on démontre ce fait, pour les deux premiers problèmes s'appliquant encore sans modification. Mais ce résultat négatif est presque le seul que nous possédions à son égard.

39. — L'étude d'un cas limite permet de se rendre compte au moins de la nature de la difficulté. Proposons-nous de résoudre le problème pour la portion de l'espace située au dessus du plan des $x\,y$, la valeur de $\frac{dV}{dn}$ étant donnée en tout point de ce plan à l'exception d'une certaine aire Σ dans laquelle on donne V lui-même. On impose en outre à la fonction V la condition de s'annuler à l'infini à la façon d'un potentiel (les

---

([1]) Ce problème pourrait, à la rigueur, être regardé comme un cas particulier de celui qu'on étudie en théorie de la chaleur, en considérant h tantôt comme nul, tantôt comme infini.

valeurs données à la frontière étant supposées bien entendu con avec cette condition . Le problème est alors déterminé.

Si la valeur de V était donnée sur tout le plan, la solution serait tentiel de double couche d'épaisseur $\frac{V}{2\pi}$. Si au contraire la déri donnée partout, V serait un potentiel de simple couche de densité

Nous prendrons comme inconnues auxiliaires les valeurs de la de cette simple couche dans l'intérieur de l'aire Σ. Celles-ci seron minées par la condition que le potentiel correspondant ait, dans ce des valeurs connues (savoir, les valeurs données diminuées de ce prend le potentiel de la simple couche extérieure à Σ).

Le problème ainsi posé : *distribuer sur une aire limitée donné simple couche dont le potentiel ait une valeur donnée en chaq de Σ*, peut être ramené au problème de Dirichlet de la manière s

Sur la normale à Σ, portons de part et d'autre de très petites lon s'annulant au contour. Nous formons ainsi deux feuillets constit leur ensemble une surface fermée S. Le problème qui consiste à sur S une simple couche de potentiel donné en chaque point n'e que celui de la distribution électrique sur S (supposée placée dans u électrique donné) ; il se ramène au problème de Dirichlet. La densi chée sur Σ est évidemment le double de la limite vers laquelle densité sur S, lorsque les longueurs λ tendent vers zéro.

Lorsque l'aire Σ est circulaire ou elliptique, on peut prendre un ellipsoïde infiniment aplati ayant Σ pour section principale.

Les méthodes connues pour la résolution du problème de Diri l'ellipsoïde donnent alors la solution du problème.

Le procédé précédent ne s'applique malheureusement pas (dı sous la même forme) hors du cas de la frontière plane lequel est d de signification réelle). Considérons par exemple une sphère dont l est divisée en deux parties dans l'une desquelles Σ, on donne la vale pendant que la donnée est $\frac{dV}{dn}$ dans le reste. Si Σ se red isait à 0, la de la fonction harmonique V serait donnée par la formule (31). on prend pour inconnues auxiliaires les valeurs de $\frac{dV}{dn}$ dans l'aire devra les déterminer par la condition que l'intégrale

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int \ldots dS \quad -\frac{1}{4\pi}\int\int\Big(\ldots \frac{R}{\ldots} \cdot \frac{1}{R}\log\frac{2R\cdot\ldots}{\ldots\sin}$$

ait des valeurs données sur Σ. C'est un problème beaucoup plus difficile que le premier : il appartient il est vrai, à une catégorie de questions qui ont été résolues par les récents travaux de M. Fredholm [1]. Mais cette solution est de forme relativement compliquée.

40. — Il existe cependant quelques cas exceptionnels où le problème mixte se ramène aisément à celui de Dirichlet. Tels sont, par exemple :

le cas d'un prisme ou d'un cylindre droit (l'axe des z parallèle aux arêtes), V étant donné sur la surface latérale et $\frac{dV}{dn}$ sur les bases. La fonction harmonique $\frac{\partial V}{\partial z}$ sera alors donnée par les conditions de Dirichlet ;

celui d'une portion de sphère limitée par un angle polyèdre ou un cône ayant son sommet au centre, V étant donnée sur la surface polyédrique ou conique, $\frac{dV}{dn}$ sur la surface sphérique. (Un cas particulier remarquable est celui de la demi-sphère, la surface polyédrique étant réduite à un plan). On opérerait comme au n° 30 ;

celui d'une portion de volume de révolution limitée à deux plans menés par l'axe, $\frac{dV}{dn}$ étant donné sur ces plans et V sur la surface. On prendra pour nouvelle inconnue la fonction harmonique (comme on s'en assure aisément par les considérations des n°s 30 et 37) $x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}$ (où l'axe des z est l'axe de révolution).

On calculerait également sous forme de série de fonctions sphériques (comparer 29 bis) une fonction harmonique dans l'espace compris entre deux sphères concentriques et donnée par des valeurs sur une des sphères, celle de sa dérivée normale sur l'autre.

41. — D'autre part, on généralise sans difficulté au problème mixte la théorie de la fonction de Green que nous avons appliquée au problème de Neumann. Seulement cette fonction de Green est en général inconnue.

41 bis. — Il est clair, comme au n° 5, qu'on ne doit pas considérer comme essentiellement différent du problème dont nous venons de parler, celui dans lequel, avec les mêmes conditions aux limites, on aurait affaire, non plus à l'équation de Laplace, mais à l'équation (2).

[1] Voir entre autres C.-R. Ac. des Sc., 27 janvier-3 juin 1902.

CHAPITRE II

LES ONDES AU POINT DE VUE CINÉMATIQUE

§ 1. — RÉSULTATS CLASSIQUES (¹)

a) *Résultats relatifs aux déformations*

42. — La position d'un milieu déformable, tel qu'un fluide, est dét lorsque l'on assigne la position de chaque point : autrement dit, lors les coordonnées x, y, z d'un point quelconque sont données par des r tions de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x = F_1(a, b, c) \\ y = F_2(a, b, c) \\ z = F_3(a, b, c) \end{cases}$$

a, b, c, étant des paramètres destinés à distinguer les uns des autres différents points du fluide, par exemple les coordonnées qu'avaient res tivement les points dans une position déterminée de ce milieu.

S'il y a *mouvement*, c'est-à-dire si la position du milieu dépend temps t, les formules (1) deviendront

$$(1') \qquad \begin{cases} x = F_1(a, b, c, t) \\ y = F_2(a, b, c, t) \\ z = F_3(a, b, c, t). \end{cases}$$

La figure formée par l'ensemble des points dont chacun a pour coordon cartésiennes les valeurs de a, b, c correspondant à un point du milieu dite l'*état initial* de ce milieu. Cet état initial pourra être, par exem celui où se trouvait le milieu à un instant déterminé t_0 de son mouvem

(¹) Voir Lord Kelvin et Tait, *Treatise of natural philosophy* ; Kirchhoff, *M nique* ; *Traité de Mécanique rationnelle*, de M. Appell, tome III, ch. XXII et X

Mais il n'est pas nécessaire qu'il en soit ainsi, ni même que l'état initial soit physiquement réalisable ; son rôle se borne à permettre d'exprimer mathématiquement que *la particule* qui, à l'instant t_2, occupe la position (x_2, y_2, z_2) est *la même* qui, à l'instant t_1, était en (x_1, y_1, z_1) : on reconnaîtra qu'il en est ainsi lorsque les valeurs de a, b, c qui, pour $t = t_1$, donnent $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ seront les mêmes qui, pour $t = t_2$, donnent $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$.

Rien ne nous empêchera, le cas échéant, de changer d'état initial ; autrement dit, d'exprimer x, y, z, dans les formules (1'), non plus en fonction de a, b, c, mais en fonction d'autres paramètres a', b', c', pourvu que ces derniers soient fonctions uniquement de a, b, c, et non du temps, a, b, c étant également calculables en fonction de a', b', c'.

43. — Dans le cas particulier où on considère l'état initial comme une première position occupée par le milieu, les formules (1) définissent une *déformation* permettant de passer de cette première position à celle dans laquelle les coordonnées sont x, y, z.

On nomme *déformation identique* celle dans laquelle la seconde position coïncide avec la première, les fonctions F_1, F_2, F_3 n'étant respectivement autres que a, b, c.

44. — Il sera toujours supposé que les équations (1'), lorsqu'on y donne x, y, z et t, admettent une solution unique en a, b, c : autrement dit, qu'à un même instant t, deux particules différentes ne peuvent occuper la même position. Ceci exprime évidemment l'*impénétrabilité* de la matière.

45. — Nous supposerons également que les fonctions x, y, z sont en général continues. Nous remarquerons toutefois qu'en ce qui concerne la continuité par rapport à a, b, c, cette seconde hypothèse est beaucoup moins légitime que la première. C'est ce dont on se rendra compte en remarquant que deux liquides ou deux gaz mis en présence finissent en général par se mélanger : dans ce cas il est clair que des molécules séparées primitivement par des intervalles finis, — à savoir celles qui appartiennent respectivement aux deux fluides et n'étaient pas primitivement situées sur leur surface de contact —, viennent plus tard en contact immédiat les unes avec les autres. Il n'y a évidemment aucune raison de supposer que les différentes parties d'un même fluide ne diffusent pas les unes dans les autres comme le font les molécules de deux fluides différents : s'il en est

ainsi, x, y, z, tout en étant continues par rapport à t, seront des fonctions totalement discontinues de a, b, c.

Malgré cela, l'hypothèse de la continuité semble, dans un grand nombre de cas, rendre un compte suffisant des phénomènes. Nous l'adopterons dans ce qui va suivre et nous supposerons même les fonctions x, y, z dérivables en général.

15bis. — Il est clair que ceci limite, dans une certaine mesure, ce qu'il y a d'arbitraire, d'après ce que nous avons dit plus haut dans le choix de l'état initial : lorsque nous remplacerons les coordonnées initiales a, b, c par d'autres a', b', c', il faudra que celles-ci soient des fonctions dérivables des premières.

16. — Nous n'excluons d'ailleurs pas — et nous étudierons plus loin — le cas où les fonctions x, y, z seraient discontinues, par rapport à a, b, c, sur des surfaces isolées.

En particulier, tandis qu'il ne peut jamais arriver, en vertu de notre première hypothèse (n° **11**), que deux portions du milieu pénètrent l'une dans l'autre, l'inverse peut avoir lieu : il peut fort bien se faire que deux régions primitivement contiguës se séparent l'une de l'autre, de manière à creuser une cavité entre elles.

On suppose toutefois, sauf indication contraire, — et c'est aussi ce que nous ferons dans ce qui va suivre —, *que de telles cavités ne se produisent pas*, se réservant de traiter à part les cas où elles prendraient naissance.

17. — Nous allons rappeler d'abord les principes relatifs aux déformations.

Les équations (1), différenciées, donnent

$$(2)\quad \begin{cases} dx = a_1\,da + b_1\,db + c_1\,dc, \\ dy = a_2\,da + b_2\,db + c_2\,dc, \\ dz = a_3\,da + b_3\,db + c_3\,dc, \end{cases}$$

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 étant les dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c. Le déterminant

$$(3)\quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à a, b, c, ne saurait changer de signe lorsqu'on fait varier a, b, c ; sans quoi il est aisé de voir que ce changement de signe ayant lieu suivant une surface de position initiale S_0 et de position actuelle S, les régions du milieu initial voisines de S_0 et situées de part et d'autre de S_0 donneraient, dans le milieu actuel, des régions contiguës à S et situées du même côté de S : ce qui est contraire à l'hypothèse faite au n° **44**. Le déterminant D ne saurait non plus, dans l'équation (**1'**), s'annuler, quels que soient a, b, c, pour une certaine valeur de t, sans quoi on sait que x, y, z ne seraient pas des fonctions distinctes de a, b, c, contrairement à la même hypothèse. Ce déterminant aura donc un signe invariable ; nous le supposerons toujours positif [1]. Ce déterminant D est lié à la *densité* ρ du milieu au point considéré. Celle-ci est en effet définie par la condition que l'élément de masse dm soit égal à $\rho\, dx\, dy\, dz$. Ce même élément étant, d'autre part, égal à $\rho_0\, da\, db\, dc$, où ρ_0 est une fonction de a, b, c indépendante de t, on a

$$D = \frac{\rho_0}{\rho}; \tag{3'}$$

nous supposerons que ρ n'est jamais infini, de sorte que D ne s'annule pas.

On désigne encore le déterminant $D = \frac{\rho_0}{\rho}$ sous le nom de *dilatation* de l'état (x, y, z) par rapport à l'état (a, b, c).

48. — Si le milieu considéré n'occupe qu'une portion limitée de l'espace, il est impossible (dans les hypothèses théoriques que nous avons adoptées) qu'un point situé sur la surface limite dans l'état initial devienne ensuite un point intérieur ou inversement. Car un petit arc de courbe à tangente variant continûment comprenant le point en question se changera nécessairement en un arc analogue, lequel sera ou ne sera pas nécessairement compris tout entier dans le milieu, suivant que ce point est ou non intérieur.

49. — Si l'on se borne à étudier ce qui se passe au voisinage d'un point déterminé du milieu en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur et que, dans chacun des espaces initial et actuel, on transporte l'origine

---

(1) Il est clair que ceci apporte une nouvelle restriction au choix de l'état initial.

des coordonnées en ce point, on pourra remplacer, dans les formules (2), da, db, dc, dx, dy, dz par a, b, c, x, y, z et écrire

$$(2') \qquad \begin{cases} x = a_1 a + b_1 b + c_1 c \\ y = a_2 a + b_2 b + c_2 c \\ z = a_3 a + b_3 b + c_3 c \end{cases}$$

La déformation du milieu autour du point considéré O coïncide donc sensiblement avec celle qui est définie par la substitution linéaire (2').

Géométriquement parlant, la transformation (nommée quelquefois *affinité*) définie par les équations (2') est une transformation homographique qui conserve le plan de l'infini. Elle peut être considérée comme caractérisée par la propriété de changer deux droites parallèles quelconques en deux droites parallèles et d'altérer dans un même rapport deux segments quelconques pris sur ces deux droites.

30. — Les équations (2') peuvent, en général, on le sait, être mises sous la forme

$$(4) \qquad X = s_1 A, \qquad Y = s_2 B, \qquad Z = s_3 C.$$

où A, B, C sont des fonctions linéaires de a, b, c et X, Y, Z désignent les *mêmes* fonctions de x, y, z ; les nombres s_1, s_2, s_3 étant les racines de l'équation

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_1 - s & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - s & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - s \end{vmatrix} = 0 ;$$

mais lorsque l'équation précédente a des racines multiples, il n'est pas toujours possible de réduire la substitution (2') à la forme (4). De plus l'équation (5) peut avoir des racines imaginaires.

Une autre forme donnée à la substitution (2'), et qui a une bien plus grande importance en mécanique des fluides, est, au contraire, toujours possible sous forme réelle : c'est celle qui fait intervenir la notion de *déformation pure*.

On dit que la substitution (2') représente une déformation pure lorsqu'elle peut être mise sous la forme (4), les plans $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ formant un trièdre trirectangle. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la quantité

$$(6) \qquad xda + ydb + zdc$$

soit une différentielle exacte, autrement dit, que le déterminant δ soit sy-

métrique. La première partie de cette proposition fait partie de la théorie connue des surfaces du 2e degré ; la seconde résulte de ce que l'expression (6) est invariante par tout changement de coordonnées rectangulaires effectué simultanément sur x, y, z et sur a, b, c, et de ce que, d'autre part, lorsqu'on prend pour nouveaux plans cordonnés les plans $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, (ce qui est possible s'il s'agit d'une déformation pure), les équations (4) deviennent

$$(4') \qquad x = s_1 a, \qquad y = s_2 b, \qquad z = s_3 c.$$

On voit, d'après cette dernière forme, que la déformation pure revient à un système de trois dilatations effectuées dans des directions rectangulaires entre elles.

51. — Toute déformation de la forme (2') peut être remplacée par une rotation précédée ou suivie d'une déformation pure. Il suffit, à cet effet, de considérer l'*ellipsoïde des dilatations* ou l'*ellipsoïde de déformation*. On nomme ainsi, dans une déformation quelconque définie par les équations (1), l'ellipsoïde $\varphi = 1$, φ étant la forme quadratique définie par l'identité

$$\begin{aligned}\varphi(da, db, dc) \equiv (1 + 2\varepsilon_1)\, da^2 + (1 + 2\varepsilon_2)\, db^2 + (1 + 2\varepsilon_3)\, dc^2 \\ + 2\gamma_1\, db\, dc + 2\gamma_2\, dc\, da + 2\gamma_3\, da\, db \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2\end{aligned}$$

Les coefficients ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 qui figurent dans la formule précédente, c'est-à-dire les quantités données par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} 1 + 2\varepsilon_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2, \quad 1 + 2\varepsilon_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2, \\ 1 + 2\varepsilon_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 \\ \gamma_1 = \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}, \\ \gamma_3 = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} \end{cases}$$

ont dites les *composantes de déformation*. La dilatation D est une fonction de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 : car le discriminant de φ est égal à D^2.

Lorsque la déformation est de la forme (2'), l'ellipsoïde de déformation

$$(7') \qquad \varphi(a, b, c) = 1.$$

est le lieu des points qui, une fois cette déformation effectuée, se trouvent sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Trois plans diamétraux conjugués de la quadrique (7′) deviennent, par la déformation (2′), trois plans rectangulaires. Il existe donc un trièdre trirectangle T et un seul auquel correspond un trièdre trirectangle T′ : c'est celui qui est formé par les plans principaux de la quadrique en question. Une rotation de l'un des deux espaces amènera les deux trièdres T, T′, à coïncider, après quoi il ne restera plus, pour faire coïncider entièrement les deux milieux, qu'à effectuer une déformation pure.

Si la substitution (2′) est une déformation pure, la quadrique $f = 1$ définie par l'identité

$$(6') \qquad \frac{1}{2} df = x da + y db + z dc$$

a les mêmes plans principaux que l'ellipsoïde (7′), les axes de l'un ayant pour longueurs les carrés de ceux de l'autre. C'est ce qui se voit immédiatement en prenant la déformation pure sous la forme (4′).

32. — Tous ces résultats relatifs aux déformations sont bien connus mais nous devons insister un instant sur un cas particulier auquel on peut, comme l'ont fait lord Kelvin et Tait, rattacher le cas général par la considération des sections circulaires de l'ellipsoïde (7′).

Soient P un tel plan de section circulaire, P′ son homologue : un cercle tracé dans le plan P a pour transformé un cercle du plan P′ : autrement dit toutes les lignes du plan P sont dilatées dans le même rapport, de sorte que toute figure du plan P est semblable à son homologue du plan P′. Pour transformer le milieu initial en un autre qui soit semblable au milieu final (autrement dit qui s'en déduise par une homothétie et un déplacement), il suffira donc de lui faire subir une déformation de la forme (2′) dans laquelle tous les points du plan P resteront inaltérés. Ce sont de telles déformations que nous allons étudier spécialement.

Si, pour simplifier, nous prenons pour plan des xy le plan P, les formules (2′) s'écriront évidemment

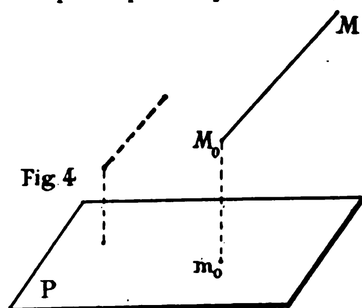
$$(8) \qquad \begin{cases} x = a + \lambda c \\ y = b + \mu c \\ z = c(1 + \nu), \end{cases}$$

puisque pour $c = 0$ on doit avoir $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Les formules ainsi écrites montrent que les déplacements de tous les points ont même direction et sont proportionnels aux distances de ces points au plan P. Pour connaître entièrement la déformation en question.

il suffira de se donner le segment (λ, μ, ν). Ce segment, qui représente le déplacement d'un point situé à l'unité de distance du plan P, peut donc être appelé le *segment caractéristique* de la déformation.

Le triangle M_0m_0M (*fig.* 4) formé par un point quelconque M_0, sa projection sur P et sa nouvelle position après la déformation, est constamment semblable au triangle analogue formé à l'aide d'un point déterminé situé à l'unité de distance du plan P et ayant pour un de ses côtés le segment caractéristique.



Pour que l'on ait affaire à une déformation pure, il faut et il suffit que $\lambda = \mu = 0$, c'est-à-dire que le segment caractéristique soit normal au plan P : la déformation se réduit alors à une dilatation normale à ce plan.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; nous pourrons toujours néanmoins supposer $\mu = 0$, en prenant pour plan des xz un plan parallèle au segment caractéristique. Prenons ce plan pour plan du tableau.

Soit M la position finale du point situé primitivement en M_0 dans le plan du tableau. La perpendiculaire élevée au milieu de M_0M, dans ce plan, coupe le plan P en un point O (*fig.* 5) tel que $OM = OM_0$. Par un second point O' appartenant également à la trace du plan du tableau sur le plan P, menons une droite $O'M'_0$ égale et parallèle à OM_0. Le parallélogramme $OM_0O'M'_0$ se transformera en un autre parallélogramme $OMO'M'$: il se sera déformé à la façon d'un parallélogramme articulé.

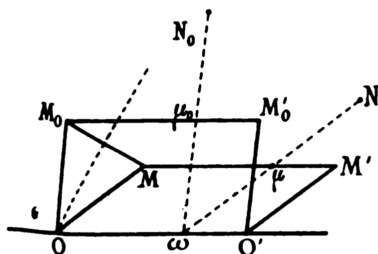


Fig. 5

De cette déformation, il est aisé de déduire le déplacement d'un point quelconque N_0 du plan du tableau. Si en effet, par ce point, nous menons une parallèle à OM_0, laquelle coupe OO' en ω et $M_0M'_0$ en μ_0, ce point μ_0 pourra évidemment être considéré comme entraîné par le mouvement de la base supérieure $M_0M'_0$ du parallélogramme articulé : ce qui fera connaître sa nouvelle position μ. En prenant alors, sur la droite $\omega\mu$, un segment ωN égal à ωN_0, on aura la nouvelle position du point N_0.

Le mouvement d'un point non situé dans le plan du tableau sera d'ailleurs défini par celui de sa projection sur ce plan. Au reste, pour obtenir en

même temps les déplacements de tous les points de l'espace, il suffirait évidemment de remplacer notre parallélogramme articulé par un parallélépipède droit articulé, ayant pour base ce parallélogramme.

53. — Si l'on a pris OO' égal à OM_0, le parallélogramme $OM_0O'M'_0$ est un losange, et il reste tel après déformation. Les deux diagonales de ces losanges et la perpendiculaire au plan du tableau constituent donc les axes du trièdre T qui est tri-rectangle tant dans l'état initial que dans l'état final. Si l'on veut décomposer la déformation en une déformation pure et une rotation, celle-ci a pour axe la perpendiculaire au plan du tableau et pour angle, celui dont tournent les diagonales du losange, soit $\frac{\widehat{M_0OM}}{2}$.

54. — Le rapport des densités, autrement dit le rapport dans lequel est altéré le volume du parallélépipède articulé, n'est évidemment autre que le rapport dans lequel est altérée la surface du parallélogramme qui lui sert de base, ou encore la hauteur de ce même parallélogramme : on aura donc

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \nu$$

ν étant la composante normale du segment caractéristique.

Si cette composante est nulle, il est clair que toute figure située dans un plan P_1 parallèle à P subit, dans son plan, une simple translation parallèle à la direction fixe $(\lambda, \mu, 0)$ et proportionnelle à la distance des deux plans $P\,P_1$. Une telle déformation prend le nom de *glissement*.

En décomposant le segment caractéristique en deux, dont l'un soit parallèle au plan P et l'autre perpendiculaire à ce plan, on décomposera la déformation qui nous occupe en un glissement et une dilatation pure.

55. — Si le plan P, au lieu d'être le plan des xy, avait pour cosinus directeurs α, β, γ, les formules (8) seraient évidemment remplacées par

$$(9)\qquad \begin{cases} x = a + \lambda(\alpha a + \beta b + \gamma c), \\ y = b + \mu(\alpha a + \beta b + \gamma c), \\ z = c + \nu(\alpha a + \beta b + \gamma c). \end{cases}$$

Le segment caractéristique serait celui qui aurait pour projections λ, μ, ν, et le rapport des densités, lié, comme nous l'avons vu, à la composante normale de ce segment, serait

$$(10)\qquad \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma.$$

Ce rapport serait également celui dans lequel serait altérée la distance d'un point quelconque au plan P.

56. — Ce qui précède nous permet de nous représenter, dans le voisinage d'une surface S, une déformation (non plus homographique, mais quelconque) qui laisse inaltérés tous les points de cette surface. Celle-ci pourra en effet, au voisinage d'un quelconque O de ses points, être assimilée à son plan tangent, de sorte que le déplacement d'un point quelconque M_0 de l'espace voisin de O, s'obstiendra en multipliant un segment déterminé (λ, μ, ν) par la distance normale du point M_0 à la surface. Bien entendu le segment(λ, μ, ν) varie avec la position du point O sur S. Les dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c, au point O, seront

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial a} = 1 + \lambda\alpha, & \dfrac{\partial x}{\partial b} = \lambda\beta, & \dfrac{\partial x}{\partial c} = \lambda\gamma, \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} = \mu\alpha, & \dfrac{\partial y}{\partial b} = 1 + \mu\beta, & \dfrac{\partial y}{\partial c} = \mu\gamma, \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} = \nu\alpha, & \dfrac{\partial z}{\partial b} = \nu\beta, & \dfrac{\partial z}{\partial c} = 1 + \nu\gamma, \end{cases}$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à S en O. La dilatation en ce point, égale au rapport dans lequel sera changée la plus courte distance du point M_0 à S, sera donnée par la formule (**10**), laquelle représente d'ailleurs bien le déterminant du tableau (**11**).

57. — *Déformations d'ordre supérieur.* — Si après avoir tenu compte, comme nous l'avons fait, des infiniment petits du premier ordre dans une déformation quelconque, on voulait faire intervenir les infiniment petits d'ordre supérieur, on serait conduit, dans le cas général, à une étude extrêmement compliquée et qui semble actuellement inutile. Nous n'aurons besoin de faire cette étude que dans un cas extrêmement particulier, tout à fait analogue à celui que nous venons de traiter.

Nous considérerons une déformation qui, non seulement laisse inaltérés tous les points d'une certaine surface S, mais coïncide en chacun de ces points avec la déformation identique aux infiniment petits du $n^{\text{ième}}$ ordre près, c'est-à-dire est telle que toutes les dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement soient nulles sur S, à l'exception des dérivées $\dfrac{\partial x}{\partial a}$, $\dfrac{\partial y}{\partial b}$, $\dfrac{\partial z}{\partial c}$ qui seront égales à 1. Cherchons les relations qui auront lieu, dans ces conditions, entre les dérivées d'ordre n.

La méthode dont nous allons nous servir pourrait d'ailleurs ren
celle que nous avons employée au n° précédent, pour le cas de $n =$

Soit d'abord, pour fixer les idées, $n = 2$ et désignons par

$$f(a, b, c) = 0,$$

l'équation de S et par f_a, f_b, f_c les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$.

La relation

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1,$$

a lieu par hypothèse en tous les points de S. Nous pourrons donc
férencier sur cette surface : autrement dit, la relation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} da + \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b} db + \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial c} dc = 0.$$

aura lieu pour toutes les valeurs de da, db, dc qui satisfont à la rel

$$(12) \qquad f_a da + f_b db + f_c dc = 0,$$

ceci donne

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}}{f_a} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b}}{f_b} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial c}}{f_c}.$$

De même les équations $\frac{\partial x}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial c} = 0$ différenciées sur S, don

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b}}{f_a} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}}{f_b} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial b \partial c}}{f_c},$$

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial c}}{f_a} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial b \partial c}}{f_b} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial c^2}}{f_c}.$$

De ces relations, résulte, en somme

$$(13) \qquad \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}}{f_a^2} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b}}{f_a f_b} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial c}}{f_a f_c} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}}{f_b^2} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial b \partial c}}{f_b f_c} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial c^2}}{f_c^2}$$

ou, en désignant par λ la valeur commune des rapports précédents,

$$(14) \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \lambda f_a^2, & \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} = \lambda f_b^2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial c^2} = \lambda f_c^2, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial c} = \lambda f_b f_c, & \frac{\partial^2 x}{\partial c \partial a} = \lambda f_c f_a, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b} = \lambda f_a f_b, \end{cases}$$

relations que l'on peut exprimer ainsi : l'équation symbolique

$$\text{(14')} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a}\,da + \frac{\partial}{\partial b}\,db + \frac{\partial}{\partial c}\,dc\right)^2 x = \lambda(f_a da + f_b db + f_c dc)^2$$

est une identité par rapport aux différentielles da, db, dc.

Si nous remarquons que la différence $x - a$ est nulle, au point considéré de S, ainsi que ses dérivées premières, nous voyons qu'on peut écrire, aux infiniment petits près du troisième ordre,

$$\text{(15)} \qquad x = a + \frac{\lambda f^2}{2}.$$

De même, en introduisant de nouveaux nombres μ, ν, on pourra écrire

$$\text{(15')} \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= b + \frac{\mu f^2}{2} \\ z &= c + \frac{\nu f^2}{2}. \end{aligned} \right.$$

58. — Les quantités f_a, f_b, f_c sont proportionnelles aux cosinus directeurs α, β, γ de la normale à S. Elles sont même respectivement *égales* à ces cosinus directeurs, si l'équation de S a été prise sous une forme convenable. Supposons qu'il en soit ainsi : alors f représentera, aux infiniment petits du second ordre près, la distance normale δ du point (a, b, c) à S. Nous voyons alors que la déformation considérée est connue, aux infiniment petits du troisième ordre près, dès qu'on se donne en chaque point m de S le segment (λ, μ, ν). Le déplacement d'un point quelconque M_0 voisin de S s'obtiendra en menant de ce point la normale $M_0 m = \delta$ et multipliant par $\frac{\delta^2}{2}$ le segment (λ, μ, ν) correspondant au point m. Un petit segment de normale à S deviendra, dans la déformation, un segment de parabole.

59. — Les choses se passent d'une façon tout analogue pour n supérieur à 2. Par hypothèse, on aura (pour $p + q + r = n - 1$)

$$\frac{\partial^{n-1} x}{\partial a^p \, \partial b^q \, \partial c^r} = 0$$

laquelle, différenciée sur S, donnera

$$\frac{\partial^n x}{\partial a^{p+1} \, \partial b^q \, \partial c^r}\,da + \frac{\partial^n x}{\partial a^p \, \partial b^{q+1} \, \partial c^r}\,db + \frac{\partial^n x}{\partial a^p \, \partial b^q \, \partial c^{r+1}}\,dc = 0$$

moyennant la relation (12), et, par conséquent,

$$\frac{\partial^n x}{\partial a^{p+1} \, \partial b^q \, \partial c^r} : f_a = \frac{\partial^n x}{\partial a^p \, \partial b^{q+1} \, \partial c^r} : f_b = \frac{\partial^n x}{\partial a^p \, \partial b^q \, \partial c^{r+1}} : f_c.$$

Autrement dit, le rapport

$$\text{(16)} \qquad \frac{\partial^n x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} : (f^p_a f^q_b f^r_c) \qquad (p + q + r = n)$$

est indépendant du choix des indices p, q, r, pourvu que leur somme soit égale à n. C'est ce rapport que l'on désignera par λ et il existera de même deux autres nombres μ, ν tels que l'on ait

$$\text{(16')} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^n y}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} = \mu f^p_a f^q_b f^r_c \\ \dfrac{\partial^n z}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} = \nu f^p_a f^q_b f^r_c \end{cases}$$

ce qui donne encore

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc\right)^n x = \lambda (f_a da + f_b db + f_c dc)^n$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc\right)^n y = \mu (f_a da + f_b db + f_c dc)^n$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc\right)^n z = \nu (f_a da + f_b db + f_c dc)^n.$$

Supposons encore l'équation de S prise de manière à ce que f représente la distance normale du point (a, b, c) à S et f_a, f_b, f_c les cosinus directeurs de la normale à S. Nous voyons que le déplacement d'un point voisin de S est de la forme $\left(\frac{\lambda f^n}{n!}, \frac{\mu f^n}{n!}, \frac{\nu f^n}{n!}\right)$. Les petits segments de normales à S se transformeront en segments de paraboles de degré n.

60. — La densité, dépendant de dérivées du premier ordre, reste inaltérée dans les déformations d'ordre supérieur que nous venons de considérer : ses dérivées d'ordre au moins égal à $n - 1$ sont seules modifiées. Il est aisé de voir quelles seront ces modifications pour l'ordre $n - 1$.

Partons, en effet, des formules (3), (3') : ici tous les éléments du déterminant D sont égaux à zéro, sauf ceux de la diagonale principale qui ont la valeur 1. Formons la dérivée

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\partial^{n-1} D}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}.$$

Tant que nous ne ferons pas porter tout le poids de la différenciation sur un seul et même élément, le terme obtenu sera nul, puisqu'il n'y figurera que des dérivées d'ordre inférieur à n, lesquelles sont nulles par

hypothèse (sauf celles d'ordre *un*). Si, d'autre part, nous faisons subir l'opération $\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}$ à un élément non principal, nous devrons multiplier le résultat obtenu par le mineur relatif à cet élément, lequel est nul. Il ne reste donc que les trois termes obtenus en dérivant $n - 1$ fois les éléments de la diagonale principale : soit (puisque les mineurs correspondant à ces éléments sont égaux à 1)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{\partial^n x}{\partial a^{p+1} \partial b^q \partial c^r} + \frac{\partial^n y}{\partial a^p \partial b^{q+1} \partial c^r} + \frac{\partial^n z}{\partial a^p \partial b^q \partial c^{r+1}}$$

et par conséquent, en vertu des formules (16), (16'),

$$(17) \qquad \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = f_a^p f_b^q f_c^r (\lambda f_a + \mu f_b + \nu f_c) ;$$

par exemple, pour $n = 2$, on aura

$$(17') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho_0}{\rho} &= f_a(\lambda f_a + \mu f_b + \nu f_c), \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho_0}{\rho} &= f_b(\lambda f_a + \mu f_b + \nu f_c), \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_0}{\rho} &= f_c(\lambda f_a + \mu f_b + \nu f_c). \end{aligned} \right.$$

Dans les formules précédentes, on peut (ce qui nous sera utile un peu plus loin) remplacer $D = \frac{\rho_0}{\rho}$ par la quantité log D, dont la dérivée par rapport à D est égale à 1 sur S (ceci est vrai même pour la formule (17), les termes qui, au premier membre de celle-ci, contiendraient les dérivées d'ordre supérieur du logarithme, étant nuls, en vertu des hypothèses faites).

b) Résultats relatifs aux vitesses

61. — Après nous être occupés, dans ce qui précède, de la déformation représentée par les formules (1), passons à l'étude du mouvement proprement dit, c'est-à-dire faisons varier t dans les formules (1').

Dans ces conditions, le système de variables indépendantes employé jusqu'ici, — savoir les coordonnées initiales a, b, c et le temps t — n'est pas le seul que l'on ait à considérer. On peut aussi avoir à exprimer les diverses quantités sur lesquelles on opère en fonction des coordonnées *actuelles* x, y, z et de t. Lorsqu'il y aurait lieu à confusion, nous désignerons les dérivées prises dans le premier système par le symbole δ et les dérivées

partielles dans lesquelles x, y, z, t sont considérées comme des variables indépendantes, par le symbole ∂. Ainsi les composantes de la vitesse seront $u = \frac{\delta x}{\delta t}$, $v = \frac{\delta y}{\delta t}$, $w = \frac{\delta z}{\delta t}$; celles de l'accélération, $\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}$.

Il est nécessaire de savoir écrire les relations entre les dérivées partielles d'une même quantité, dans les deux systèmes. Si, d'abord, on considère les dérivées par rapport à a, b, c ou x, y, z, il faut considérer t comme constant, et l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta a} &= \frac{\delta x}{\delta a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\delta y}{\delta a}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\delta z}{\delta a}\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\delta}{\delta b} &= \frac{\delta x}{\delta b}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\delta y}{\delta b}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\delta z}{\delta b}\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\delta}{\delta c} &= \frac{\delta x}{\delta c}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\delta y}{\delta c}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\delta z}{\delta c}\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne les dérivées $\frac{\delta}{\delta t}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$, comme, a, b, c étant donnés, x, y, z sont fonctions de t et que leurs dérivées par rapport à t sont les composantes u, v, w de la vitesse, on a

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{18}$$

61 *bis*. — Nous aurons d'ailleurs à employer un système de variables intermédiaire entre les deux précédents. Dans ce dernier système, pour étudier ce qui se passe à un instant déterminé quelconque t_0, nous prendrons comme état initial l'état du milieu en cet instant : c'est en fonction des coordonnées initiales ainsi définies et du temps t que nous exprimerons les coordonnées des différents points aux instants voisins de t_0. Il est clair que, dans cette manière d'opérer, les dérivées par rapport aux coordonnées initiales seront $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$; seulement la dérivée par rapport au temps ne sera pas $\frac{\partial}{\partial t}$, mais la dérivée $\frac{\delta}{\delta t}$ qui figure au premier membre de la formule (**18**).

62. — L'état du milieu à l'instant t_0 étant pris comme état initial, comparons-lui l'état relatif à l'instant $t_0 + \delta t$. En ce nouvel état, les coordonnées des différents points seront données par les formules

$$\begin{aligned}
x' &= x + u\delta t \\
y' &= y + v\delta t \\
z' &= z + w\delta t.
\end{aligned}$$

En les différenciant par rapport à x, y, z, nous aurons les formules correspondantes à (2'), lesquelles seront

$$(19)\quad \begin{cases} dx' = dx + \delta t\, du = dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\delta t\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\delta t . dz \\ dy' = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t\, dx + dy\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\delta t\right) + \frac{\partial v}{\partial z}\delta t\, dz \\ dz' = \frac{\partial w}{\partial x}\delta t\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\delta t\, dy + dz\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\delta t\right). \end{cases}$$

Le déterminant D sera ici

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x}\delta t & \frac{\partial u}{\partial y}\delta t & \frac{\partial u}{\partial z}\delta t \\ \frac{\partial v}{\partial x}\delta t & 1 + \frac{\partial v}{\partial y}\delta t & \frac{\partial v}{\partial z}\delta t \\ \frac{\partial w}{\partial x}\delta t & \frac{\partial w}{\partial y}\delta t & 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\delta t \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t$$

(en négligeant les puissances de δt supérieures à la première). Ce déterminant étant égal à $\frac{\rho}{\rho + \delta\rho} = 1 - \frac{\delta\rho}{\rho + \delta\rho}$, on aura

$$(20)\qquad \frac{\delta\rho}{\rho\delta t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ce qui fait connaître $\frac{\delta\rho}{\delta t}$, moyennant quoi la relation (18) donne pour $\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$$(21)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Occupons-nous, d'autre part, de décomposer la substitution linéaire précédente, soit la substitution dont les coefficients sont

$$(19')\qquad \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x}\delta t, & \frac{\partial u}{\partial y}\delta t, & \frac{\partial u}{\partial z}\delta t, \\ \frac{\partial v}{\partial x}\delta t, & 1 + \frac{\partial v}{\partial y}\delta t, & \frac{\partial v}{\partial z}\delta t, \\ \frac{\partial w}{\partial x}\delta t, & \frac{\partial w}{\partial y}\delta t, & 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\delta t \end{pmatrix}$$

en une déformation pure et une rotation. C'est ce que nous ferons pa termédiaire des deux substitutions

$$(22)\quad \begin{pmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta t, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta t \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta t, & 1+\frac{\partial v}{\partial y}\delta t, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta t \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta t, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta t, & 1+\frac{\partial w}{\partial z}\delta t \end{pmatrix}$$

et

$$(23)\quad \begin{pmatrix} 1, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta t, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta t \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta t, & 1, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta t \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta t, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta t, & 1 \end{pmatrix}$$

dont le produit donne (19'), lorsqu'on y néglige les termes en δt^2.

La première représente une déformation pure, puisque le tableau est symétrique ; la seconde représente l'effet, pendant le temps δt, rotation dont les composantes sont

$$(24)\quad \begin{cases} p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

La rotation dont les composantes sont les quantités p, q, r que venons d'écrire est dite la *rotation moléculaire instantanée* ou *tourb*

63. — On peut justifier cette dénomination de rotation moléculair tantanée, en remarquant, comme l'ont fait Stokes et, et plus tard I holtz que si, dans le fluide en mouvement à l'instant considéré, on par la pensée autour du point considéré, une portion très petite de f sphérique, et qu'on suppose celle-ci brusquement solidifiée, la rot instantanée prise par le solide ainsi obtenu aura précisément pour posantes p, q, r. Beltrami [1] a montré que cette conclusion restait toutes les fois que les axes principaux d'inertie de la portion solidifiée

(1) *Principii dell' Idrodinamica razionale*. Mem. de l'Ac. de Bologne, 3e tome I, p. 458-479, 1871.

cidaient avec ceux de la déformation pure (**22**), c'est-à-dire avec ceux de la quadrique

$$(25)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \varphi = x^2\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + y^2\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + z^2\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ + yz\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + zx\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + xy\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = (1 + \alpha)x^2 \\ + (1 + \alpha')y^2 + (1 + \alpha'')z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 1, \end{cases}$$

dont les coefficients sont ceux de la substitution (**22**), à la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ près.

D'une manière générale, soit

$$(26)\quad \Phi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1,$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie de la petite molécule, qu'on suppose isolée à l'instant t_0 et brusquement solidifiée, ainsi qu'il vient d'être expliqué, l'origine étant prise au centre de gravité O de cette molécule. Pour trouver le mouvement de celle-ci autour de O après la solidification, il suffira, comme on sait, de trouver les moments totaux des quantités de mouvement relativement à trois axes rectangulaires issus de O : autrement dit, d'écrire

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = Ap_1 + B''q_1 + B'r_1 = \sum m\left(y_1\frac{\partial z_1}{\partial t} - z_1\frac{\partial y_1}{\partial t}\right),$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = B''p_1 + A'q_1 + Br_1 = \sum m\left(z_1\frac{\partial x_1}{\partial t} - x_1\frac{\partial z_1}{\partial t}\right),$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial r_1} = B'p_1 + Bq_1 + A''r_1 = \sum m\left(x_1\frac{\partial y_1}{\partial t} - y_1\frac{\partial x_1}{\partial t}\right),$$

où p_1, q_1, r_1 désignent les composantes de la rotation après solidification, pendant que x_1, y_1, z_1 désignent des coordonnées prises par rapport à un système d'axes parallèles à nos axes fixes, mais dont l'origine coïncide constamment avec le point O. $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, $\frac{\partial y_1}{\partial t}$, $\frac{\partial z_1}{\partial t}$ n'étant autres que les variations éprouvées par u, v, w, lorsqu'on passe du point O à un point infiniment voisin, on peut écrire, aux infiniment petits d'ordre supérieur près :

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}x_1 + \frac{\partial u}{\partial y}y_1 + \frac{\partial u}{\partial z}z_1$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)z_1 + qz_1 - ry_1$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + qz_1 - ry_1$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}x_1 + \frac{\partial v}{\partial y}y_1 + \frac{\partial v}{\partial z}z_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + rx_1 - pz_1$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}x_1 + \frac{\partial w}{\partial y}y_1 + \frac{\partial w}{\partial z}z_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + py_1 - qx_1,$$

où p, q, r sont les composantes du tourbillon, telles que nous les avons écrites tout à l'heure. Substituant dans les équations précédentes, il vient

$$
\begin{aligned}
Ap_1 + B''q_1 + B'r_1 &= \sum \frac{m}{2}\left(y_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) + \sum m\left[p\,(y^2 + z^2) - qxy - rxz\right] \\
&= Ap + B''q + B'r + \sum m\left[y_1(\beta'x_1 + \beta y_1 + \alpha'z_1)\right. \\
&\qquad \left. - z_1(\beta''x_1 + \alpha'y_1 + \beta z_1)\right] \\
&= Ap + B''q + B'r - \beta'B'' + \beta(A'' - A') + (\alpha' - \alpha'')B \\
&\qquad + \beta''B' \\
B''p_1 + A'q_1 + Br_1 &= B''p + A'q + Br + \sum m\left[z_1(\alpha x_1 + \beta''y_1 + \beta'z_1)\right. \\
&\qquad \left. - x_1(\beta'x_1 + \beta y_1 + \alpha''z_1)\right] \\
&= B''p + A'q + Br - \alpha B' - \beta''B + \beta'(A - A'') + \beta B \\
&\qquad + \alpha''B' \\
B'p_1 + Bq_1 + A''r_1 &= B'p + Bq + A''r + \sum m\left[x_1(\beta''x_1 + \alpha'y_1 + \beta z_1)\right. \\
&\qquad \left. - y_1(\alpha x_1 + \beta''y_1 + \beta'z_1)\right] \\
&= B'p + Bq + A''r + \beta''(A' - A) - \alpha'B'' - \beta B' \\
&\qquad + \alpha B'' + \beta'B.
\end{aligned}
$$

On voit bien ainsi que p_1, q_1, r_1 coïncident avec p, q, r lorsque l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère, et aussi lorsque ses axes coïncident en direction avec ceux de la quadrique (**25**) (car rien n'empêche alors de supposer que l'on a pris les axes de coordonnées parallèles aux axes en question, moyennant quoi l'on aurait $B = B' = B'' = \beta = \beta' = \beta'' = 0$).

Il y a lieu de remarquer, d'autre part, la forme du segment complémentaire

$$
(\mathbf{27}) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\beta''B' - \beta'B'' + \beta(A'' - A') - B(\alpha'' - \alpha') \\
\beta B'' - \beta''B + \beta'(A - A'') - B'(\alpha - \alpha'') \\
\beta'B - \beta B' + \beta''(A' - A) - B''(\alpha' - \alpha)
\end{array}
\right.
$$

qui figure dans l'expression du moment résultant des quantités de mouvement. Ce segment reste inaltéré au signe près lorsqu'on échange entre elles les formes quadratiques qui figurent dans les équations (**25**), (**26**).

64. — Une interprétation géométrique simple, sinon du segment (27), du moins de sa direction, peut être obtenue de la façon suivante :

Soit $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, un plan quelconque passant par l'origine. Le lieu des directions dont les plans diamétraux conjugués, par rapport aux qua-

driques (**25**) et (**26**) respectivement, se coupent dans ce plan est, comme on sait, un cône du second ordre qui a pour équation

$$(28)\quad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ Ax + B''y + B'z & B''x + A'y + Bz & B'x + By + A''z \\ \alpha x + \beta''y + \beta'z & \beta''x + \alpha'y + \beta z & \beta'x + \beta y + \alpha''z \end{vmatrix} = 0$$

Ce cône passe d'ailleurs par les trois arêtes du trièdre T conjugué commun aux deux quadriques en question (trièdre toujours réel puisque l'une de ces quadriques est un ellipsoïde). Inversement, l'équation de tout cône passant par les arêtes du trièdre T peut être mise dans la forme précédente.

Ecrivons que le cône (**28**) est capable d'un trièdre trirectangle inscrit. Nous trouvons

$$\lambda\left(\beta'B'' - \beta''B' + \beta(A' - A'') - B(\alpha' - \alpha'')\right) + \mu\left(\beta''B - \beta B''\right.$$
$$\left.+ \beta'(A'' - A) - B'(\alpha'' - \alpha)\right) + \nu\left(\beta B' - B\beta' + \beta''(A - A') - B''(\alpha - \alpha')\right) = 0$$

autrement dit, le plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ doit passer par la direction (**27**).

Or, parmi les cônes du second ordre qui passent par les arêtes du trièdre T, on en aperçoit immédiatement trois qui sont capables de trièdres trirectangles. Ce sont ceux qui sont formés par une face quelconque du trièdre T et le plan mené perpendiculairement à cette face, par l'arête opposée. Les trois plans ainsi menés se coupent d'ailleurs comme on sait, suivant une même droite Δ. La condition imposée à un cône du second degré d'être capable d'un trièdre trirectangle étant linéaire par rapport aux coefficients, les cônes (**28**) capables de trièdres trirectangles seront ceux qui passeront par les arêtes du trièdre T et par la droite Δ.

Dès lors, il est clair que, si l'on prend les plans diamétraux conjugués de Δ par rapport aux deux quadriques (**25**) et (**26**), leur intersection fournira la direction (**27**).

65. — On arrive à une interprétation du segment (**27**) lui-même, en considérant non seulement la quadrique (**26**), mais aussi la quadrique (**25**) (ou, ce qui revient d'ailleurs au même, la quadrique $\varphi = 1$, qu'on en déduit en retranchant $x^2 + y^2 + z^2$ au premier membre), comme des ellipsoïdes d'inertie ; par conséquent, en posant, non seulement

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \quad A' = \sum m(z^2 + x^2), \quad A'' = \sum m(x^2 + y^2),$$
$$B = -\sum myz, \quad B' = -\sum mzx, \quad B'' = -\sum mxy$$

(où, pour plus de simplicité, nous avons supprimé les initiales devenues inutiles); mais encore

$$\alpha = \sum m'(y'^2 + z'^2), \quad \alpha' = \sum m'(z'^2 + x'^2), \quad \alpha'' = \sum m'(x'^2 + y'^2),$$
$$\beta = -\sum m'y'z', \quad \beta' = -\sum m'z'x', \quad \beta'' = -\sum m'x'y'$$

on trouve alors, pour les quantités (27), les valeurs

$$\sum mm' \left[x'y'zx - z'x'xy - y'z'(y^2 - z^2) + yz(y'^2 - z'^2)\right]$$
$$= \sum mm'(xx' + yy' + zz')(y'z - z'y)$$
$$\sum mm' \left[y'z'xy - x'y'yz - z'x'(z^2 - x^2) + zx(z'^2 - x'^2)\right]$$
$$= \sum mm'(xx' + yy' + zz')(z'x - x'z)$$
$$\sum mm' \left[z'x'yz - y'z'zx - x'y'(x^2 - y^2) + xy(x'^2 - y'^2)\right]$$
$$= \sum mm'(xx' + yy' + zz')(x'y - y'x).$$

On sait que l'expression $xx' + yy' + zz'$ ne change pas par une transfor tion de coordonnées rectangulaires quelconques, et aussi qu'il en es même pour la signification géométrique du segment ($y'z - z'y$, $z'x - x'y - y'x$). On a donc bien mis en évidence cette même propriété pou segment (**27**).

66. — **Si la rotation moléculaire instantanée est partout nulle, l'exp sion $udx + vdy + wdz$ est une différentielle exacte.**

Il existe une fonction, dite *potentiel des vitesses*, dont les dérivées tielles sont les composantes u, v, w. Si le milieu considéré occupe l'es tout entier, cette fonction, définie à une constante près, est elle-m univoque dans tout le milieu. Il en est de même si celui-ci n'occupe qu' portion de l'espace lorsque cette portion est à *connexion linéaire sim* c'est-à-dire lorsque toute ligne fermée, tracée dans le milieu est réduct à un point par une déformation continue effectuée sans sortir de ce mil

Dans le cas contraire (par exemple, si le volume occupé a la forme d tore), le potentiel des vitesses peut avoir des *périodes*, c'est-à-dire s'a menter de constantes lorsque le point (x, y, z) décrit un chemin fe non réductible à un point (dans le cas du tore, lorsque ce point revier sa position primitive après avoir tourné de 2π autour de l'axe).

67. — **Lorsque la rotation moléculaire instantanée (p, q, r) n'est nulle, les équations différentielles**

$$\text{(29)} \qquad \frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}$$

définissent une double infinité de lignes, nommées *lignes-tourbillons*.

Il peut arriver que les lignes-tourbillons se ferment sur elles-mêm

mais, en général, leur disposition (comme celle de toutes les lignes définies par des équations différentielles) est beaucoup plus compliquée. Chacune d'elles revient une infinité de fois aussi près qu'on le veut de son point de départ, mais, en général, sans jamais repasser exactement par cette position. Des observations toutes semblables s'appliquent aux *filets-tourbillons*, ou surfaces formées par les lignes tourbillons issues des points d'une ligne fermée quelconque. La méconnaissance de ces circonstances a quelquefois conduit à énoncer des conclusions erronées.

Par contre, les raisonnements analogues relatifs aux *lignes de courant*, c'est-à-dire à celles qui sont définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

dans le cas où il existe un potentiel des vitesses F, sont exacts (du moins si le milieu est à connexion linéaire simple et, par conséquent, la fonction F univoque). F est, en effet, croissant le long des lignes de courant (puisque sa différentielle $dF = udx + vdy + wdz$ est proportionnelle à $u^2 + v^2 + w^2$) : celles-ci ne peuvent dès lors, ni se fermer sur elles-mêmes, ni affecter la disposition compliquée dont il vient d'être question : elles se terminent nécessairement à la surface-limite (ou à l'infini, si le milieu est illimité).

68. — Si la rotation moléculaire instantanée n'est plus nulle, on ne peut plus écrire

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Clebsch a proposé de mettre alors les composantes de la vitesse sous la forme

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial x} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial F}{\partial y} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial F}{\partial z} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

ψ et χ étant deux autres fonctions à déterminer. Il fonde la possibilité d'une telle réduction sur le raisonnement suivant :

Si l'on différencie la seconde des équations (**30**) par rapport à z, la sième par rapport à y et que l'on retranche, il vient

$$(31) \qquad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = -2p = \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial z}$$

Cette équation et les deux autres analogues

$$(31') \qquad \begin{cases} -2q = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial \chi}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial \chi}{\partial x} \\ -2r = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial \chi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial \chi}{\partial y} \end{cases}$$

montrent que ψ et χ satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$p\frac{\partial \psi}{\partial x} + q\frac{\partial \psi}{\partial y} + r\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

autrement dit, sont des intégrales du système d'équations différent (**29**), celui qui définit les lignes tourbillons.

Or, les fonctions p, q, r satisfont à la relation

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Il en résulte que le système (**29**) admet comme *multiplicateur* [1] l'u La théorie du multiplicateur enseigne que, dans ces conditions, on trouver pour ce système deux intégrales ψ et χ vérifiant les relations ((**31'**), d'où l'on peut, sans difficulté, remonter à (**30**).

Cette démonstration prouve bien, en effet, que l'on peut donner composantes u, v, w la forme (**30**) *dans une région suffisamment pet du milieu*. Mais les choses se passeraient en général tout autrement si envisageait le milieu tout entier. L'existence des intégrales ψ et χ es effet, établie dans une région telle que R, et il y a une telle région au sinage de tout point de notre milieu. Mais si — comme cela a lieu dans des cas exceptionnels — les lignes tourbillons présentent la dis tion compliquée signalée tout à l'heure, il sera évidemment impos que ψ et χ soient bien déterminés dans tout le volume considéré.

---

(1) Voir par exemple Jordan, *Cours d'Analyse*, vol. III, ch. I.

Par contre la forme

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y},$$
$$v = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$w = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

qui a été également proposée pour les composantes de la vitesse, peut toujours être obtenue. Il suffit évidemment, pour le démontrer, d'établir que, moyennant la condition $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$, on peut toujours trouver trois fonctions φ, ψ et χ vérifiant les équations

$$A = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y},$$
$$B = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$C = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Or la démonstration de cette proposition ([1]) échappe à la difficulté signalée tout à l'heure, et cela (moyennant quelques précautions faciles) même si la région considérée est multiplement connexe.

§ 2. — ÉTUDE DES DISCONTINUITÉS — LES CONDITIONS IDENTIQUES

69. — Nous avons, dans ce qui précède, supposé les coordonnées x, y, z et leurs dérivées des divers ordres continues. Cette hypothèse est cependant loin d'être la seule qu'il convienne d'envisager, et l'étude de mouvements dans lesquels quelques unes des dérivées en question éprouvent des variations brusques est indispensable dans une foule de théories physiques. La propagation de discontinuités de cette espèce a été déterminée, pour le cas du mouvement rectiligne des gaz, par Riemann, dans un mémoire célèbre dont nous parlerons plus loin. Plus tard, en 1877, Christoffel reprit ([2]) les résultats de Riemann pour les étendre aux mouvements à trois dimensions,

---

(1) Voir par exemple Picard, *Traité d'Analyse*, tome I.
(2) *Annali di Matematica*, tome VIII ; 1877.

mais il se limita à des ondes tout exceptionnelles, les ondes de choc (ondes du premier ordre) dont l'existence avait été découverte par Riemann et, de plus, comme l'étude de ces ondes offre des difficultés spéciales, il dut n'en considérer qu'un cas limite, celui où les discontinuités sont infiniment petites. C'est Hugoniot qui, en 1887, sans connaître d'ailleurs les travaux de Riemann et de Christoffel, montra [1] l'importance des discontinuités dont nous allons parler, et en fit une étude générale : Il mit en lumière une notion fondamendale, celle de *compatibilité*, sur laquelle nous aurons à insister plus loin, et dont la nécessité semble n'avoir pas apparu à Christoffel, quoiqu'elle eût été indiquée par Riemann dans le cas du mouvement rectiligne.

70. — Les discontinuités que nous étudierons ne seront point les plus générales qui puissent se présenter. Nous n'envisagerons pas, par exemple, des singularités telles que celles auxquelles nous avons fait allusion au n° **45**.

Nous supposerons, au contraire, que les discontinuités en question n'affectent à un instant quelconque que des surfaces isolées. L'équation d'une de celles-ci, rapportée à l'état initial, sera

$$(\mathbf{32}) \qquad f(a, b, c) = 0$$

c'est-à-dire que la relation précédente exprime la condition que doivent remplir les coordonnées initiales a, b, c d'une particule pour que celle-ci soit, à l'instant t, le siège d'une discontinuité. On peut d'ailleurs envisager également l'équation

$$(\mathbf{33}) \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

de cette même surface par rapport aux coordonnées actuelles x, y, z : équation qui représente à chaque instant t, le lieu des positions actuelles des particules affectées par la discontinuité à cet instant, et qu'on déduira de la première en éliminant (a, b, c) à l'aide des relations (**1**). Nous désignerons par S_0 la surface représentée en coordonnées cartésiennes, par l'équation (**32**) : par S, celle qui est représentée, par l'équation (**33**) et qui est la transformée de la première dans la déformation (**1**).

La surface S_0 divisera l'espace lieu du point (a, b, c) (ou la surface S

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. [illegible] XXXIX, 1887. *Journal de Math.*, Tome III, série IV, 1887.

divisera l'espace lieu du point (x, y, z)) en deux régions 1 et 2. Dans chacune d'elles (du moins jusqu'à ce qu'on rencontre une nouvelle surface de discontinuité) nous admettrons que les coordonnées x, y, z et leurs dérivées existent et sont continues.

71. — Nous compléterons cette hypothèse par une autre : non seulement les dérivées dont nous parlons seront continues à l'intérieur de chacune des régions 1 et 2, mais encore nous admettrons que chacune d'elles tend vers une limite déterminée lorsque le point (a, b, c) tend vers une position limite située sur S, en restant toujours dans une même région.

Autrement dit, soit Φ une fonction quelconque de x, y, z, a, b, c, t et des dérivées partielles de tous ordres de x, y, z par rapport à a, b, c, t. Cette quantité, une fois exprimée à l'aide des variables indépendantes a, b, c pour une valeur déterminée de t, en sera une fonction Φ_1 qui sera définie en tout point intérieur à la région 1 et continue en ce point. *Cette fonction aura également une valeur déterminée* Φ^0_1 *en un point quelconque* (a_0, b_0, c_0) *de* S ; et elle y sera continue, en ce sens que Φ_1 tendra vers Φ^0 lorsque le point (a, b, c) tendra vers (a_0, b_0, c_0) *sans cesser à aucun moment d'appartenir à la région 1.*

De même Φ, considérée dans la région 2, sera une fonction Φ_2 de a, b, c, laquelle sera définie et sera continue dans toute cette région 2. Cette fonction prendra une valeur déterminée Φ^0_2 au point (a_0, b_0, c_0) de S ; elle sera, en ce point, continue pour les déplacements intérieurs à la région 2.

Seulement, les deux valeurs Φ^0_1, Φ^0_2 correspondant à un même point (a_0, b_0, c_0, t_0) pourront ne pas être égales entre elles, et c'est en cela que consistera la discontinuité. Ainsi la valeur de Φ subira, au passage de S une *variation brusque*. La valeur $\Phi^0_2 - \Phi^0_1$ de cette variation sera souvent désignée par la notation $[\Phi]$.

72. — Moyennant les hypothèses précédentes, nous allons avoir à démontrer un lemme d'analyse nécessaire pour tout ce qui va suivre.

Supposons que a, b, c varient suivant une courbe entièrement située dans la région 1. Alors, comme nous faisons sur les dérivées partielles de Φ les mêmes hypothèses que sur Φ lui-même et que, par conséquent, ces dérivées existeront et seront continues dans la région 1, on obtiendra la différentielle de Φ par l'application du théorème des fonctions composées.

En sera-t-il de même lorsque le point $(a, b, c$ sera situé sur S et se déplacera sur cette surface ? Cela n'est point évident. Sur S, en effet, Φ_1 n'a point, à proprement parler de dérivées partielles, puisqu'il n'est défini

que d'un côté de S et non dans tout le voisinage du point considéré : on n'est donc pas dans les conditions ordinaires d'application du théorème en question.

La conclusion reste cependant exacte. C'est ce que nous allons constater en nous plaçant, pour plus de simplicité, dans le cas de deux dimensions.

Nous aurons alors une fonction Φ définie d'un seul côté d'une courbe S (fig. 6). Dans sa région d'existence, elle aura des dérivées partielles, lesquelles tendront vers des limites déterminées (que nous désignerons encore par $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial y_0}$) lorsque le point (x, y) tendra vers un point M (x_0, y_0) de S.

Il s'agit de savoir si Φ aura, par rapport à l'arc s de S, une dérivée donnée par la relation

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\frac{dy_0}{ds}.$$

On peut répondre à cette question en employant d'une manière convenable la démonstration classique. Celle-ci consiste en effet, M′ et M″ étant deux points infiniment voisins l'un de l'autre sur S, à introduire soit le point P qui a même abscisse que M″ et même ordonnée que M′, soit le point Q qui a même abcisse que M′ et même ordonnée que M″.

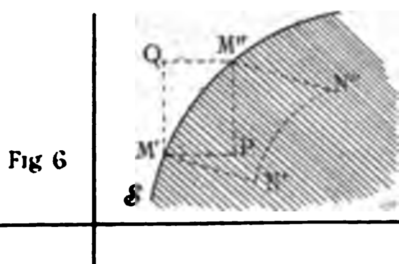


Fig 6

Or, des deux lignes brisées M′PM″ et M′QM″, il y en a, en général, une (fig. 6) qui est située tout entière dans la région d'existence de Φ et qui permettra par conséquent l'application du raisonnement.

On pourra encore arriver au résultat comme l'indique M. Painlevé [1] en menant par les différents points de l'arc M′M″, de petits segments égaux et parallèles entre eux situés dans la région d'existence de Φ. Le lieu des extrémités de ces segments est un arc N′N″ sur lequel on peut écrire (puisque les dérivées de Φ existent cette fois)

$$\Phi_{N''} - \Phi_{N'} = \int_{N'}^{N''} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) ds.$$

(1) Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1887, 1re partie, ch. II, n° 2.

Quand la longueur du segment tendra vers 0, les quantités $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ tendront, et cela uniformément, vers $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial y_0}$: on aura donc, à la limite,

$$\Phi_{M''} - \Phi_{M'} = \int_{M'M''} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds} \right) ds$$

ce qui équivaut manifestement au résultat demandé.

Chacun des deux raisonnements précédents s'étend évidemment, de lui-même, à un nombre supérieur de dimensions, de sorte que notre lemme est démontré.

73. — Cela posé, supposons que la fonction Φ ne subisse pas de variation brusque sur S_0, mais que ses dérivées premières soient au contraire discontinues : autrement dit, que l'on ait

$$[\Phi] = 0, \qquad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right], \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right] \neq 0.$$

Le lemme précédent va nous permettre de voir que les changements de valeurs $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right], \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right]$ éprouvés par ces dérivées partielles ne pourront pas être quelconques.

Faisons, en effet, décrire au point (a, b, c) un chemin quelconque situé sur la surface S_0. En chaque point de ce chemin, la fonction Φ_1 est définie : on pourra, de plus, la différencier sur S_0 en appliquant notre lemme, et écrire

$$d\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} db + \frac{\partial \Phi_1}{\partial c} dc.$$

Les mêmes considérations s'appliquent à la fonction Φ_2 : on a

$$d\Phi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} db + \frac{\partial \Phi_2}{\partial c} dc.$$

Retranchons membre à membre : les premiers membres se détruisent, puisque Φ est supposé continu au passage de S_0. Il vient

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial a} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial a}\right) da + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial b} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial b}\right) db + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial c} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial c}\right) dc$$
$$= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right] da + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right] db + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right] dc = 0.$$

Or les différentielles da, db, dc sont évidemment quelconques sous la seu condition de vérifier l'équation différentielle de S_0.

$$f_a da + f_b db + f_c dc = 0$$

(en désignant, comme plus haut, par f_a, f_b, f_c les dérivées partielles de Donc on doit avoir

$$(34) \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right] : f_a = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right] : f_b = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial c}\right] : f_c .$$

74. — Supposons maintenant que, non seulement Φ, mais encore dérivées premières restent continues. Que pourrons-nous dire des var tions brusques des dérivées secondes ?

Nous pourrons appliquer le mode de raisonnement précédent à fonction $\frac{\partial\Phi}{\partial a}$: ce qui donnera

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}\right] : f_a = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial b}\right] : f_b = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial c}\right] : f_c$$

et de même, aux fonctions $\frac{\partial\Phi}{\partial b}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial c}$, ce qui donnera

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial b}\right] : f_a = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2}\right] : f_b = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial b\,\partial c}\right] : f_c ,$$

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial c}\right] : f_a = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial b\,\partial c}\right] : f_b = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial c^2}\right] : f_c .$$

Comme précédemment, ces égalités montrent que l'on a

$$(35) \qquad \begin{cases} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}\right] = \lambda f_a^2, & \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2}\right] = \lambda f_b^2, & \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial c^2}\right] = \lambda f_c^2 \\ \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial b\,\partial c}\right] = \lambda f_b f_c, & \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial c\,\partial a}\right] = \lambda f_c f_a, & \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial b}\right] = \lambda f_a f_b \end{cases}$$

λ étant un nombre convenablement choisi.

D'une manière générale, si la fonction Φ est continue ainsi que dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n - 1$, on aura, entre les variations dérivées partielles d'ordre n, la série de proportions

$$(35') \qquad \left[\frac{\partial^n\Phi}{\partial a^n}\right] : f_a^n = \cdots = \left[\frac{\partial^n\Phi}{\partial a^\alpha\,\partial b^\beta\,\partial c^\gamma}\right] : f_a^\alpha f_b^\beta f_c^\gamma = \cdots = \left[\frac{\partial^n\Phi}{\partial c^n}\right] : f_c^n$$

...

En désignant par λ la valeur commune de ces rapports, on aura, quels que soient da, db dc,

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial a}\right] da + \left[\frac{\partial}{\partial b}\right] db + \left[\frac{\partial}{\partial c}\right] dc\right)^n \Phi = \lambda\,(f_a da + f_b db + f_c dc)^n.$$

75. Les discontinuités que nous étudierons pourront être de différents ordres. Il pourra arriver, en premier lieu, que les coordonnées x, y, z elles-mêmes soient discontinues, non pas en fonction du temps (nous n'admettrons jamais qu'une molécule passe instantanément d'une position à une autre), mais en fonction de a, b, c. De telles discontinuités seront dites d'*ordre zéro* ou *absolues*.

Dans le cas contraire, la discontinuité ne portant pas sur les coordonnées elles-mêmes, pourra porter sur leurs dérivées : celles-ci seront classées d'après leurs ordres.

Nous nommerons *ordre* d'une dérivée $\frac{\partial^n x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s}$, l'ordre total de dérivation $p + q + r + s = n$ par rapport à a, b, c, t.

Toutefois, dans les dérivées d'un même ordre, il y aura lieu d'établir des catégories suivant le nombre s des dérivations effectuées par rapport à t. Ce dernier nombre sera dit l'*indice* de la dérivée considérée.

Par exemple, les dérivées du second ordre de x, y, z sont au nombre de 30, dont 18 d'indice zéro, savoir :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b}, \ldots \frac{\partial^2 x}{\partial c^2}; \frac{\partial^2 y}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial c^2},$$

9 d'indice un, savoir

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial c \partial t}; \frac{\partial^2 y}{\partial a \partial t}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial c \partial t};$$

3 d'indice deux :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

c'est-à-dire les composantes de l'accélération.

L'*ordre d'une discontinuité* sera le plus petit des ordres des dérivées qu'elle affecte.

76. — Il y a lieu de noter qu'on peut avoir à considérer des discontinuités d'ordre infini.

Si, en effet, une fonction analytique régulière autour du point (a_0, b_0, c_0) est déterminée par la formule de Taylor dès qu'on donne les valeurs de toutes ses dérivées en ce point, il n'en est plus du tout de même si la fonction est quelconque, soit qu'elle cesse d'être analytique, soit qu'elle cesse d'être régulière.

Supposons, dès lors, que le mouvement soit analytique dans toute la région 1. Il pourra arriver qu'il y ait, au passage de S_0, continuité des dérivées de tous les ordres, et que, cependant, le mouvement de la région 2 ne soit pas le prolongement analytique du premier, soit qu'il ne soit pas lui-même analytique, soit qu'il présente sur S_0 des singularités convenables (comme par exemple celle qu'offre la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x = 0$).

L'étude de discontinuités de cette nature offre des difficultés particulières. Nous ne l'aborderons pas dans ce qui va suivre.

77. — Laissant de côté les discontinuités absolues, nous allons nous occuper d'abord des discontinuités du premier ordre.

Il y a alors trois dérivées d'indice un et neuf dérivées d'indice zéro. Les premières sont les composantes de la vitesse. Nous n'avons pour le moment aucune observation à faire à leur égard.

Au contraire, il résulte du lemme démontré tout à l'heure que les variations brusques des dérivées d'indice zéro ne peuvent pas être quelconques. En effet, puisque par hypothèse il n'y a pas de discontinuité d'ordre zéro et que x est continu, on doit avoir

$$\frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{f_a} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial b}\right]}{f_b} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial c}\right]}{f_c},$$

ou, en désignant par λ la valeur commune de ces rapports

$$(36) \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] = \lambda f_a, \quad \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right] = \lambda f_b, \quad \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right] = \lambda f_c.$$

On aura, de même, en introduisant deux autres nombres μ et ν,

$$(36') \qquad \begin{cases} \left[\frac{\partial y}{\partial a}\right] = \mu f_a, & \left[\frac{\partial y}{\partial b}\right] = \mu f_b, & \left[\frac{\partial y}{\partial c}\right] = \mu f_c, \\ \left[\frac{\partial z}{\partial a}\right] = \nu f_a, & \left[\frac{\partial z}{\partial b}\right] = \nu f_b, & \left[\frac{\partial z}{\partial c}\right] = \nu f_c; \end{cases}$$

Nous considérerons λ, μ, ν comme les projections d'un vecteur (tracé, à partir du point (x, y, z), dans l'espace lieu de ce point). *Ce vecteur suffit à définir les variations des neuf dérivées d'indice zéro.*

On lui adjoindra, pour avoir les variations brusques de toutes les dérivées du premier ordre, le vecteur qui représente la variation brusque de vitesse et que nous appellerons, par analogie $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

78. — Les considérations développées au n° **56** permettent de donner au résultat précédent une interprétation géométrique simple. A cet effet, imaginons — ce qui est évidemment possible, — un état fictif du milieu coïncidant avec l'état actuel envisagé dans la région 1, mais tel que les dérivées des coordonnées soient continues au passage de la surface S_0.

Nous appellerons, pour abréger, « état de la région 1 », l'état ainsi défini dans tout l'espace : c'est, comme on voit, l'état de la région 1 prolongé dans la région 2.

Soient x', y', z' les coordonnées d'une particule quelconque de la région 2 dans ce nouvel état.

Les quantités

$$\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right], \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right],$$

ne sont évidemment autres que les valeurs, en un point quelconque de S_0, des expressions

$$\frac{\partial (x - x')}{\partial a}, \frac{\partial (x - x')}{\partial b}, \frac{\partial (x - x')}{\partial c},$$

(considérées par rapport à la région 2).

Or puisque x', y' z' coïncident avec x, y, z en tout point de S_0, la déformation qui permet de passer du point (x', y', z') au point (x, y, z) rentre dans la catégorie étudiée au n° **56** : autrement dit, le déplacement éprouvé, dans cette déformation, par un point M infiniment voisin d'un point déterminé de S_0 est de direction constante, et proportionnel à la distance de M à S_0.

C'est ce qui résulte d'ailleurs des formules précédentes. Si, en effet, à partir d'un point de S_0 nous donnons à a, b, c des accroissements da, db, dc, comme d'autre part f est nul sur S_0, on aura sensiblement

$$df = f = f_a da + f_b db + f_c dc,$$

de sorte que l'on pourra écrire, aux infiniments petits d'ordre supérieur près,

$$(37)\quad \begin{cases} x - x' = \lambda f \\ y - y' = \mu f \\ z - z' = \nu f. \end{cases}$$

On voit donc bien que le déplacement de notre particule, dans le passage de l'état de la région 1 à celui de la région 2, est représenté par le segment (λ, μ, ν), multiplié par le nombre f qui est lui-même proportionnel à la distance du point (a, b, c) à la surface $f = 0$.

79. — De cette remarque résulte immédiatement que le segment que nous venons d'introduire, et qui est représenté par les nombres λ, μ, ν, est indépendant de la direction des axes par rapport auxquels est défini le point (x, y, z). Autrement dit, si l'on rapportait à d'autres axes rectangulaires l'espace lieu de ce point, les nouvelles valeurs de λ, μ, ν seraient les projections du même segment sur les nouveaux axes : ce segment représentant le déplacement du point considéré (dans le passage de la position (x', y', z') à la position (x, y, z)) divisé par la valeur de f, laquelle est calculée sur l'état initial et indépendante des coordonnées actuelles.

79 bis. — Mais le choix des axes dans l'espace actuel n'est pas le seul élément arbitraire qui existe dans notre mode de représentation.

En premier lieu, la surface de discontinuité rapportée à l'état initial a été représentée par une équation $f(a, b, c) = 0$. Il est clair qu'il y a une infinité de manières de représenter ainsi la même surface. Rien n'empêche de multiplier f par un nombre constant quelconque ou, plus généralement, par une fonction quelconque ne s'annulant pas sur S_0.

En second lieu, nous pouvons choisir d'une façon entièrement arbitraire l'état initial auquel sont rapportées les molécules. Nous aurons donc à nous demander quelle influence le choix de cet initial aura sur le segment (λ, μ, ν).

Occupons-nous d'abord de cette dernière question. Supposons qu'on change l'état initial (a, b, c) en une autre (a', b', c') mais sans changer de fonction f (autrement dit, en se contentant de remplacer, dans cette fonction, a, b, c par leurs valeurs en fonction de $(a' b' c')$). Alors *le segment* (λ, μ, ν) *ne sera pas changé*. C'est ce qui résulte immédiatement de l'interprétation que nous venons d'indiquer, ce segment étant le quotient du déplacement d'un point quelconque lorsqu'on passe de l'état de la région 1 à celui de la région 2, par la valeur de f en ce point.

80. — Supposons maintenant, au contraire, que sans changer a, b, c, on multiplie la fonction f par un facteur (continu et dérivable) non nul aux points considérés. Dans ces conditions f_a, f_b, f_c seront évidemment multipliés par un même nombre [1] puisqu'ils sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à S_0. Dès lors, dans les formules (**36**), (**36'**), λ, μ, ν *devront être divisés par ce nombre.*

Nous voyons donc que, pour définir d'une façon précise les composantes λ, μ, ν, il est nécessaire de spécifier sous quelle forme on écrit l'équation de la surface S_0.

La convention qu'il est naturel de faire à cet égard consiste à admettre que α, β, γ sont respectivement *égaux* aux cosinus directeurs de la normale à S_0 par exemple, à prendre pour f la distance normale du point (a, b, c) à cette surface. Nous adopterons cette convention dans ce qui va suivre.

Il est d'ailleurs aisé d'écrire les composantes λ, μ, ν ainsi définies lorsque l'équation de S_0 est donnée sous une forme quelconque. Car les cosinus directeurs α, β, γ ont pour valeurs

$$\frac{f_a}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, \quad \frac{f_b}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, \quad \frac{f_c}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}.$$

Il suffira donc de remplacer les formules (**36**) (**36'**) par

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned}
\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] &= \lambda\frac{f_a}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, & \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right] &= \lambda\frac{f_b}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, & \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right] &= \lambda\frac{f_c}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}\\
\left[\frac{\partial y}{\partial a}\right] &= \mu\frac{f_a}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, & \left[\frac{\partial y}{\partial b}\right] &= \mu\frac{f_b}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, & \left[\frac{\partial y}{\partial c}\right] &= \mu\frac{f_c}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}\\
\left[\frac{\partial z}{\partial a}\right] &= \nu\frac{f_a}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, & \left[\frac{\partial z}{\partial b}\right] &= \nu\frac{f_b}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}, & \left[\frac{\partial z}{\partial c}\right] &= \nu\frac{f_c}{\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}}
\end{aligned}\right.$$

81. — Il reste, cependant, à choisir le signe du radical $\sqrt{f_a^2+f_b^2+f_c^2}$. Nous supposerons que les cosinus directeurs α, β, γ sont ceux de la normale S_0 dirigée vers la région 2. Le signe du radical devra, dès lors être celui de f dans cette région.

Si, au contraire, f a été choisi de manière à permettre l'application des formules (**36**) (**36'**), il devra, à cet effet, être égal (tout au moins aux

(1) Ce nombre est d'ailleurs de la valeur que prend, au point considéré, le facteur en question.

infiniment petits d'ordre supérieur près) à la distance normale du point (a, b, c) à S_0, cette distance étant comptée comme positive dans la région 2 et comme négative dans la région 1.

82. — La convention précédente résout la difficulté relative à la forme de la fonction f. Mais elle nous fait perdre le bénéfice de la remarque faite tout à l'heure, d'après laquelle le choix de l'état initial paraissait sans influence sur le résultat. En effet, pour deux états initiaux différents (a, b, c) et $(a'\ b'\ c')$, la quantité $f_a^2 + f_b^2 + f_c^2$ qui figure au dénominateur dans les formules (**38**) a des valeurs différentes ([1]). Par conséquent, suivant qu'on adoptera l'un ou l'autre d'entre eux, il faudra multiplier le segment (λ, μ, ν) par un facteur différent.

Il est d'ailleurs aisé d'avoir la signification du rapport de ces deux facteurs. Chacun d'eux représente en effet la quantité par laquelle il faut multiplier f pour qu'il représente la distance normale d'un point à la surface de discontinuité, dans l'état initial correspondant. Leur rapport est donc la dilatation normale à cette surface dans le passage d'un de ces états à l'autre.

83. — Nous ne pouvons donc maintenant parler du segment (λ, μ, ν) qu'en indiquant à l'aide de quel état initial il a été formé.

Dans certaines questions (par exemple en élasticité) l'état initial est indiqué par la nature même du problème. Il n'en est pas de même en hydrodynamique. Nous conviendrons alors de prendre pour état initial l'état actuel de la région 1 à l'instant considéré. Cet état, n'est, il est vrai, ainsi défini que dans une partie du milieu ; mais on peut, ainsi que nous venons de le faire il y a un instant, le prolonger dans la région 2, les dérivées partielles des coordonnées x, y, z par rapport aux coordonnées a, b, c (coordonnées de l'état initial quelconque primitivement choisi) restant continues ; et cet état fictif peut être pris comme nouvel état initial, sans que la condition énoncée au n° **15** *bis* cesse d'être remplie.

84. — Si on intervertissait les rôles des deux régions 1 et 2, il est clair d'abord, qu'il faudrait changer les signes des quantités

$$\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_2 - \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_1, \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right].$$

([1]) Si $\varphi(da, db, dc)$ représente l'élément linéaire $da^2 + db^2 + dc^2$, exprimé à l'aide des variables da', db', dc' ; φ' la forme adjointe de φ ; D le déterminant fonctionnel $\frac{D(a, b, c)}{D(a', b', c')}$, la quantité $\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2$ est égale à $\frac{1}{D^2}\varphi'\left(\frac{\partial f}{\partial a'}, \frac{\partial f}{\partial b'}, \frac{\partial f}{\partial c'}\right)$.

Il en serait de même de

$$\left[\frac{\delta y}{\delta a}\right], \ldots, \left[\frac{\delta z}{\delta c}\right].$$

Mais, d'autre part, le dénominateur $\sqrt{f_a^2 + f_b^2 + f_c^2}$ subirait un double changement : d'une part, un changement de signe ; d'autre part, d'après ce qui vient d'être dit, une multiplication par un facteur égal à la dilatation normale à S qui intervient dans le passage de l'état 1 à l'état 2, c'est-à-dire à l'unité plus la composante normale $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ de notre segment.

En définitive, pendant que les cosinus directeurs α, β, γ seront changés en $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, les composantes dont nous venons de nous occuper seront changées en

$$(39)\quad \begin{cases} \lambda' = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}, \quad \mu' = \dfrac{\mu}{1 + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}, \\ \nu' = \dfrac{\nu}{1 + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}. \end{cases}$$

85. — Avant de passer au cas général, nous traiterons encore, en raison de son importance, celui de la discontinuité du second ordre. Envisageons d'abord les dérivées d'indice 0. La fonction x étant continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, la proposition du n° **74** nous montre l'existence d'un nombre λ tel que l'on ait

$$(40)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\delta^2 x}{\delta a^2}\right] = \lambda f_a^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 x}{\delta b^2}\right] = \lambda f_b^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 x}{\delta c^2}\right] = \lambda f_c^2 \\ \left[\dfrac{\delta^2 x}{\delta b\,\delta c}\right] = \lambda f_b f_c, \quad \left[\dfrac{\delta^2 x}{\delta c\,\delta a}\right] = \lambda f_c f_a, \quad \left[\dfrac{\delta^2 x}{\delta a\,\delta b}\right] = \lambda f_a f_b. \end{cases}$$

De même μ et ν désignant deux nombres convenablement choisis, on pourra écrire

$$(40')\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta a^2}\right] = \mu f_a^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta b^2}\right] = \mu f_b^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta c^2}\right] = \mu f_c^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta b\,\delta c}\right] = \mu f_b f_c, \\ \left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta c\,\delta a}\right] = \mu f_c f_a, \quad \left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta a\,\delta b}\right] = \mu f_a f_b \\ \left[\dfrac{\delta^2 z}{\delta a^2}\right] = \nu f_a^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 z}{\delta b^2}\right] = \nu f_b^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 z}{\delta c^2}\right] = \nu f_c^2, \quad \left[\dfrac{\delta^2 z}{\delta b\,\delta c}\right] = \nu f_b f_c, \\ \left[\dfrac{\delta^2 z}{\delta c\,\delta a}\right] = \nu f_c f_a, \quad \left[\dfrac{\delta^2 z}{\delta a\,\delta b}\right] = \nu f_a f_b. \end{cases}$$

Les nombres λ, μ et ν seront encore considérés comme les composantes d'un segment.

Il est clair que ce résultat pourra être interprété comme le précédent. Si nous prolongeons l'état de la région 1 dans la région 2, de manière que les dérivées secondes restent continues, il faudra opérer dans cette dernière région, pour passer de l'état 1 ainsi prolongé à l'état de la région 2, une transformation qui appartient à la catégorie étudiée au n° **57**, de sorte que, si x', y', z' sont les coordonnées de l'état 1 prolongé, x, y, z, celles de l'état 2, on aura pour $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ les formules (**14**) et analogues du n° **57**, lesquels équivalent bien aux précédentes.

Ces formules montrent que l'on a

$$(41) \qquad x - x' = \lambda \frac{f^2}{2}, \quad y - y' = \mu \frac{f^2}{2}, \quad z - z' = \nu \frac{f^2}{2}.$$

Elles peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial a}\right] da + \left[\frac{\partial}{\partial b}\right] db + \left[\frac{\partial}{\partial c}\right] dc\right)^2 (x, y, z)$$
$$= (\lambda, \mu, \nu)\,(f_a\,da + f_b\,db + f_c\,dc)^2.$$

86. — Passons aux dérivées d'indice 1. Celles-ci seront de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}, \cdots \frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t}.$$

Nous appliquerons le lemme du n° **72** à la quantité $\frac{\partial x}{\partial t}$: nous aurons

$$(42) \qquad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right] = \lambda_1 f_a, \quad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\right] = \lambda_1 f_b, \quad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t}\right] = \lambda_1 f_c$$

et de même

$$(42') \qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial t}\right] = \mu_1 f_a, \quad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t}\right] = \mu_1 f_b, \quad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial c\,\partial t}\right] = \mu_1 f_c \\ &\left[\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial t}\right] = \nu_1 f_a, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial t}\right] = \nu_1 f_b, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t}\right] = \nu_1 f_c \end{aligned}\right.$$

$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ étant un nouveau segment.

Enfin, les discontinuités λ_2, μ_2, ν_2 éprouvées par les trois dérivées d'indice deux pourront être considérées comme les composantes d'un troisième segment, qui est la variation brusque de l'accélération.

L'interprétation géométrique de ce dernier segment est donc évidente par elle-même. Quant à celle du segment $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ on pourra l'obtenir en attribuant aux différents points des vitesses fictives égales aux véritables dans la région 1, mais telles que les dérivées partielles de leurs composantes soient continues. Ceci changerait, bien entendu, les nouvelles positions acquises par les points de la région 2 au bout d'un temps δt, et ce changement se traduirait par une déformation appartenant à la catégorie étudiée au n° **56**. Cette déformation, étant proportionnelle à δt, aurait un segment caractéristique de la forme $(\lambda_1 \delta t, \mu_1 \delta t, \nu_1 \delta t)$, λ_1, μ_1, ν_1 étant les quantités qui figurent dans les formules (**42**), (**42'**).

Comme précédemment, il résulte de là que les segments (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, ne sont pas changés lorsque l'on change d'état initial sans changer la fonction f (au sens précédemment expliqué), mais que dans le changement de forme de celle-ci, les composantes de chacun d'eux sont altérées dans un même rapport [1]. Il convient dès lors, comme précédemment, de prendre f égal à la distance normale du point a, b, c à S_0 ou, ce qui revient au même, de remplacer les formules précédentes par

$$\left[\frac{\delta^2 x}{\delta a^2}\right] = \lambda\alpha^2, \ldots \left[\frac{\delta^2 x}{\delta b\, \delta c}\right] \lambda\beta\gamma, \ldots; \left[\frac{\delta^2 y}{\delta a^2}\right] = \mu\alpha^2, \ldots \left[\frac{\delta^2 z}{\delta a\, \delta b}\right] = \nu\alpha\beta,$$

α, β, γ désignant encore les cosinus directeurs de la normale à S_0 dirigée vers la région 2. Nous devrons également, comme dans le cas des discontinuités du premier ordre, spécifier quel est l'état initial choisi. Lorsqu'il n'y en aura aucun d'indiqué par la nature de la question, on prendra l'état actuel à l'instant considéré.

Ici, contrairement à ce qui se passait dans le cas du premier ordre, il est indifférent de choisir l'état de la région 1 ou celui de la région 2. La déformation qui permet de passer d'un de ces états à l'autre coïncide, en effet, avec la déformation identique aux infiniment petits du second ordre près, au voisinage des points de S_0 : il n'y a donc aucune dilatation normale en ces points, et, par conséquent, aucun changement dans la quantité $f_a^2 + f_b^2 + f_c^2$.

Si on intervertissait les rôles des deux régions, les coefficients f_a, f_b, f_c subiraient de simples changements de signe. Il en serait par conséquent de même pour λ, μ, ν, tandis que λ_1, μ_1, ν_1 resteraient inaltérés.

---

(1) Ce rapport est encore égal au rapport des deux valeurs de f, s'il s'agit du segment $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$; mais il a une valeur égale au carré de la première pour le segment (λ, μ, ν).

88. — Les résultats relatifs au cas de n quelconque apparaissent maintenant d'eux-mêmes. Il existera $n+1$ segments dont le premier (λ, μ, ν) fera connaître les variations des dérivées d'indice 0 par les formules

$$(43)\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\partial^n x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\right] = \lambda \alpha^p \beta^q \gamma^r, \quad \left[\frac{\partial^n y}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\right] = \mu \alpha^p \beta^q \gamma^r, \\ \left[\frac{\partial^n z}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\right] = \nu \alpha^p \beta^q \gamma^r \qquad (p+q+r=n) \end{array}\right.$$

ou

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial a}\right]da + \left[\frac{\partial}{\partial b}\right]db + \left[\frac{\partial}{\partial c}\right]dc\right)^n (x, y, z) = (\lambda, \mu, \nu)(\alpha da + \beta db + \gamma dc)^n;$$

le second $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, les variations des dérivées d'indice 1, par les formules

$$(43')\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\partial^n x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t}\right] = \lambda_1 \alpha^p \beta^q \gamma^r, \quad \left[\frac{\partial^n y}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t}\right] = \mu_1 \alpha^p \beta^q \gamma^r, \\ \left[\frac{\partial^n z}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t}\right] = \nu_1 \alpha^p \beta^q \gamma^r \qquad (p+q+r=n-1) \end{array}\right.$$

Le $h+1^{\text{ième}}$, $(\lambda_h, \mu_h, \nu_h)$, donnera les variations des dérivées d'indice h

$$(43^h)\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\partial^n x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^h}\right] = \lambda_h \alpha^p \beta^q \gamma^r, \quad \left[\frac{\partial^n y}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^h}\right] = \mu_h \alpha^p \beta^q \gamma^r, \\ \left[\frac{\partial^n z}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^h}\right] = \nu_h \alpha^p \beta^q \gamma^r \qquad (p+q+r=n-h) \end{array}\right.$$

et ainsi de suite jusqu'à un $n+1^{\text{ième}}$ segment $(\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$ lequel ne sera autre que

$$\left[\frac{\partial^n x}{\partial t^n}\right], \quad \left[\frac{\partial^n y}{\partial t^n}\right], \quad \left[\frac{\partial^n z}{\partial t^n}\right].$$

L'interprétation géométrique des segments (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sera la même que tout à l'heure. Celle du segment $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ s'obtiendra si, laissant inaltérées les positions et les vitesses, on corrige les accélérations des points de la région 2 de manière à rendre leurs dérivées d'ordre $n-2$ continues au passage de S_0. Il en résultera, au bout du temps infiniment petit ∂t, une déformation proportionnelle à ∂t^2 et dont le segment caractéristique sera $(\lambda_2 \partial t^2, \mu_2 \partial t^2, \nu_2 \partial t^2)$

On pourra opérer de même pour les segments suivants en introduisant les accélérations d'ordre supérieur.

On déduira de là (ou encore de ce fait évident que les dérivées de x, y, z se transforment dans un changement de coordonnées absolument comme ces variables elles-mêmes) que les segments précédents ne dépendent pas du choix des coordonnées dans l'espace (x, y, z). Ils sont indépendants du choix de la fonction f, puisque les formules précédentes ne contiennent que les cosinus directeurs de la normale à S_0.

Si aucun état initial n'est imposé en particulier par la question, on adoptera encore l'état actuel à l'instant considéré, dans l'une ou dans l'autre de nos deux régions (ce qui est indifférent du moment que n est supérieur à l'unité).

L'interversion des régions 1 et 2 changera le sens des segments dont l'indice est de même parité que n et laissera les autres inaltérés.

§ 3. — ÉTUDE DES DISCONTINUITÉS (*Suite*) — LES CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ CINÉMATIQUE

89. — Nous avons maintenant à nous demander si les relations obtenues jusqu'ici sont les seules auxquelles soient assujettis les éléments de nos discontinuités.

Supposons que nous nous donnions arbitrairement, en chaque point a_0, b_0, c_0, de S_0, les nombres λ, μ, ν ; λ_1, μ_1, ν_1 ; ... λ_n, μ_n, ν_n. Soient d'autre part X, Y, Z ; X_1, Y_1, Z_1 ; ... X_n, Y_n, Z_n des fonctions de a, b, c continues partout ainsi que leurs dérivées de tous les ordres. A l'instant considéré t_0, donnons aux différents points du milieu :

Les positions (X, Y, Z) dans la région 1, et les positions

$$\left(X + \frac{\lambda f^n}{n!}, \quad Y + \frac{\mu f^n}{n!}, \quad Z + \frac{\nu f^n}{n!}\right)$$

dans la région 2 ;

les vitesses (X_1, Y_1, Z_1) dans la région 1, et les vitesses

$$\left(X_1 + \frac{\lambda_1 f^{n-1}}{(n-1)!}, \quad Y_1 + \frac{\mu_1 f^{n-1}}{(n-1)!}, \quad Z_1 + \frac{\nu_1 f^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

dans la région 2 ;

les accélérations (X_2, Y_2, Z_2) dans la région 1 et les accélérations

$$\left(X_2 + \frac{\lambda_2 f^{n-2}}{(n-2)!}, \quad Y_2 + \frac{\mu_2 f^{n-2}}{(n-2)!}, \quad Z_2 + \frac{\nu_2 f^{n-2}}{(n-2)!}\right)$$

dans la région 2,

etc.;

enfin, des accélérations d'ordre n égales à (X_n, Y_n, Z_n) dans la région 1 et à $(X_n + \lambda_n, Y_n + \mu_n, Z_n + \nu_n)$ dans la région 2.

Dans les expressions précédentes, il est convenu qu'on donne à $\lambda, \mu, \nu, \ldots \lambda_n, \mu_n, \nu_n$ les valeurs qu'ils ont au point (a_0, b_0, c_0), pied de la normale abaissée du point (a, b, c) sur S_0.

On obtient ainsi, à l'instant t_0, une discontinuité d'ordre n dans laquelle les segments définis plus haut ont, en chaque point de S_0, les valeurs $(\lambda, \mu, \nu), \ldots (\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$, lesquelles ont été prises arbitrairement.

90. — Il reste à savoir si ce système de positions de vitesses et d'accélérations correspond bien à un *mouvement* satisfaisant à la condition d'impénétrabilité énoncée au n° **44** et aussi à l'hypothèse supplémentaire faite au n° **46**.

Or, si nous considérons deux milieux remplissant à un instant déterminé t, deux régions contiguës 1 et 2 de l'espace (la surface limite étant S), et si, *les supposant entièrement indépendants l'un de l'autre*, nous donnons, en cet instant, à leurs différents points des vitesses et des accélérations des divers ordres continues dans chacun des milieux, mais variant (pour les points de la surface de contact) lorsqu'on passe de l'un d'eux à l'autre, ces milieux cesseront en général, aux instants postérieurs à t, d'être contigus : ils se sépareront ou, au contraire se mêleront, certains points du milieu 1 entrant dans le milieu 2 et inversement. Pour qu'il en soit autrement, il faut évidemment certaines conditions : ces conditions que nous retrouverons plus loin, sont les suivantes : *Les composantes normales de la vitesse et des accélérations successives doivent, pour chaque point de S, être les mêmes dans les deux milieux.*

Il semble donc qu'elles doivent être vérifiées dans le problème actuel.

91. — Nous allons voir que les choses ne se passent point ainsi. Mais nous avons, à cet effet, deux cas fondamentaux à distinguer :

Ou bien la discontinuité affecte constamment les mêmes molécules, autrement dit, l'équation de la surface de discontinuité ne contient pas t : nous dirons alors que la discontinuité est *stationnaire* ;

Ou bien l'équation de la surface de discontinuité dépend du temps : elle doit, par conséquent, s'écrire

(44) $$f(a, b, c, t) = 0$$

et est résoluble par rapport à t, lorsque a, b, c sont donnés (du moins dans une certaine région). La discontinuité affecte alors des molécules différentes, suivant les instants où on la considère : Nous dirons qu'elle se *propage*. Nous donnerons encore à une telle discontinuité le nom d'*onde*.

Les conditions précédemment énoncées sont effectivement nécessaires dans le cas des discontinuités stationnaires.

Elles ne le sont plus pour les discontinuités qui se propagent.

92. — Cependant, les segments (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, ... $(\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$ ne peuvent pas être quelconques si nous nous plaçons, comme nous avons le droit de le faire, *dans une région et dans un intervalle de temps où la surface des discontinuités reste unique.*

Supposons que l'instant t_0 où nous prenons la surface de discontinuité S_0 fasse partie d'un tel intervalle de temps. Dans ces conditions, nous devrons exprimer que cette surface est unique, *non seulement pour la valeur t_0 de t, mais aussi pour les autres valeurs, tant antérieures que postérieures.*

Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons, avec Hugoniot, que les deux mouvements qui ont lieu, à l'instant t_0, dans les régions 1 et 2, sont *compatibles.*

Les conditions pour que deux mouvements soient compatibles varient avec les problèmes de dynamique que l'on a à résoudre. Mais nous allons constater qu'il en est de communes à tous ces problèmes : ces conditions sont nécessaires pour que la compatibilité soit cinématiquement possible.

93. Cas des discontinuités stationnaires. — Considérons tout d'abord une discontinuité stationnaire d'ordre n et soit $\frac{\partial^n x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^h}$ une dérivée d'ordre n qui soit discontinue. Supposons que l'indice h soit différent de zéro.

En un point (a_0, b_0, c_0) de la surface de discontinuité, la quantité $\left[\frac{\partial^{n-h} x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\right]$ a sa dérivée $h^{\text{ème}}$ par rapport au temps différente de zéro, *et cela pour une suite continue de valeurs de t,* puisque, par hypothèse, la discontinuité ne cesse pas de porter sur la molécule (a_0, b_0, c_0).

Donc $\left[\frac{\partial^{n-h} x}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}\right]$ ne peut pas être nul, sauf pour des valeurs particu-

lières de t. Si nous faisons abstraction de celles-ci, nous voyons qu'une dérivée d'ordre $n - h$ est discontinue, et que, par conséquent, la discontinuité est d'ordre inférieur à n, contrairement à l'hypothèse.

Donc enfin h doit être nul.

Ainsi, *dans une discontinuité stationnaire, les premières dérivées qui soient discontinues sont d'indice zéro.*

94. — Supposons, en particulier, qu'une dérivée de la forme $\frac{\partial^n x}{\partial t^n}$, $\frac{\partial^n y}{\partial t^n}$, $\frac{\partial^n z}{\partial t^n}$ soit discontinue. Alors, d'après le raisonnement qui précède, il en sera de même pour une au moins des coordonnées x, y ou z. Il y aura donc *discontinuité absolue*. Les deux portions 1 et 2 du milieu se comportent comme deux corps différents et glissent l'une sur l'autre en restant constamment en contact.

Ce sont précisément les conditions où nous nous étions placés au n° **90**. Ainsi que nous l'avons dit en cet endroit, si la vitesse, l'accélération, etc. sont discontinues, leurs discontinuités ne peuvent pas être quelconques. Il est aisé de trouver les conditions auxquelles elles doivent satisfaire (en admettant toujours, comme nous l'avons dit au n° **46**, que les deux milieux partiels 1 et 2 restent en contact et ne se séparent point).

Soit, en effet, S la surface de discontinuité *considérée dans l'état actuel*, et soit

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{45}$$

l'équation de S. Une particule, tant de la région 1 que de la région 2, qui appartient à cette surface à un moment quelconque ne cessera pas (n° **48**) d'en faire partie. On aura donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les particules situées, à l'instant t, au même point (x, y, z) de S et qui font partie, l'une de la portion 1, l'autre de la portion 2 du milieu. On pourra, dans l'équation précédente, remplacer x, y, z par x_1, y_1, z_1 et aussi par x_2, y_2, z_2. En retranchant membre à membre les deux relations ainsi obtenues, il vient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = 0. \tag{46}$$

Ainsi *la variation brusque de vitesse est un segment tangent à* S.

Il peut arriver, à un instant particulier, que $\left[\frac{\delta x}{\delta t}\right]$, $\left[\frac{\delta y}{\delta t}\right]$, $\left[\frac{\delta z}{\delta t}\right]$ soient nuls. Alors, à son tour, *la variation d'accélération* (si elle n'est pas nulle) *est tangente à* S. C'est ce que l'on voit en différenciant deux fois l'équation (**45**), ce qui donne

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta y}{\delta t} + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}\frac{\delta z}{\delta t}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

où tout est continu, sauf les termes

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\delta^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}.$$

L'ensemble de ceux-ci ne saurait donc varier par la discontinuité.

Si l'accélération elle-même était continue, une conclusion analogue à la précédente aurait lieu pour l'accélération du troisième ordre; et ainsi de suite.

Remarquons encore qu'*aucune des dérivées de x, y, z n'est discontinue lorsqu'on la considère comme fonction du temps*, a, b, c restant fixes; car alors le point (a, b, c) fait partie soit de la région 1, soit de la région 2, et dans chacune de celles-ci, tout est continu.

95. Cas des ondes. — Contrairement aux premières, les discontinuités qui se propagent ne donnent jamais lieu à des discontinuités absolues. En effet, deux molécules infiniment voisines à un instant donné ne peuvent cesser d'être telles que par le passage de la discontinuité. Mais comme ce passage n'a lieu que pendant un temps infiniment petit, leurs positions ne seront altérées qu'infiniment peu pendant ce temps.

Contrairement au cas des discontinuités stationnaires, les dérivées qui seront discontinues le seront par rapport au temps. Car une molécule déterminée quelconque passera d'une des deux régions à l'autre au moment où elle sera atteinte par l'onde.

Enfin, s'il y a compatibilité, il n'arrivera pas, comme dans le cas des discontinuités stationnaires, que les dérivées d'indice 0 soient discontinues à l'exclusion des autres dérivées du même ordre. Bien au contraire, nous allons voir que toutes celles-ci varieront en même temps.

96. — Occupons-nous donc d'exprimer qu'il y a compatibilité, au sens du

n° **92** : que les deux régions 1 et 2, dans chacune desquelles le mouvement sera continu, sont séparées par une surface dont la position varie avec le temps, mais qui est unique à chaque instant, et dont nous désignons l'équation par

$$(44) \qquad f(a, b, c, t) = 0$$

A cet effet, il nous sera commode d'utiliser le langage de la géométrie à quatre dimensions en considérant a, b, c, t comme les coordonnées d'un point dans un espace à quatre dimensions E_4.

Dans cette conception, l'espace ordinaire [lieu du point (a, b, c)] considéré à l'instant t doit être regardé comme la section de l'espace E_4 par la multiplicité $t =$ const.

L'équation (**44**) représentera une multiplicité triplement étendue $\mathfrak{S}_0$ dont la section par $t =$ const. donnera la surface de discontinuité S_0 à l'instant t. La multiplicité $\mathfrak{S}_0$ divisera E_4 en deux régions 1 et 2 engendrées respectivement, lorsque le temps varie, par les régions 1 et 2 précédemment considérées de l'espace ordinaire.

L'hypothèse précédemment faite (n°s **70-71**) consiste en ceci que les quantités sur lesquelles nous opérons et leurs dérivées sont continues en dehors de $\mathfrak{S}_0$ et sur $\mathfrak{S}_0$ même, tout en pouvant être discontinues au passage de $\mathfrak{S}_0$.

97. — Cela étant, nous appliquerons la méthode du n° **73**, non plus à la surface S_0, mais à la multiplicité $\mathfrak{S}_0$. Soit Φ une fonction continue sur cette multiplicité, mais dont les dérivées soient discontinues (toujours dans les conditions indiquées aux n°s **70-71**). On verra, comme précédemment que l'on doit avoir

$$(48) \qquad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right] da + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right] db + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right] dc + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] dt = 0.$$

moyennant l'équation différentielle de la multiplicité $\mathfrak{S}_0$, laquelle s'écrira, cette fois,

$$(49) \qquad f_a\, da + f_b\, db + f_c\, dc + f_t\, dt = 0$$

f_t désignant la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$. Les équations (**34**) peuvent donc être complétées : on peut écrire

$$(50) \qquad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right] : f_a = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right] : f_b = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right] : f_c = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] : f_t.$$

Si, maintenant, on suppose également que les dérivés de Φ jusqu'à l'ordre n sont continues, on aura, au lieu des proportions (35),

$$(51)\quad \left[\frac{\delta^n\Phi}{\delta a^n}\right] : f_a^n = \ldots = \left[\frac{\delta^n\Phi}{\delta a^p \delta b^q \delta c^r \delta t^h}\right] : f_a^p f_b^q f_c^r f_t^h = \ldots = \left[\frac{\delta^n\Phi}{\delta t^n}\right] : f_t^n$$

lesquelles, comme précédemment, pourront se résumer dans l'identité (par rapport à da, db, dc, dt)

$$\left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc + \left[\frac{\delta}{\delta t}\right] dt\right)^n \Phi$$
$$= \lambda (f_a da + f_b db + f_c dc + f_t dt)^n$$

λ étant la valeur commune des rapports (51)

98. — Supposons, comme nous en avons convenu au n° **80**, que les dérivées f_a, f_b, f_c sont respectivement *égales* aux cosinus directeurs α, β, γ de la normale à la surface S_0 représentée à l'instant t par l'équation (44) : f représentant (aux infiniment petits du second ordre près) la distance normale d'un point à cette surface, *mesurée sur l'état initial adopté*, et comptée comme positive dans la région 2.

Soient alors f_0 (a, b, c) le premier membre de l'équation de S_0, c'est-à-dire la fonction f dans laquelle on ne fera pas varier t ; S'_0, la surface analogue à S_0 correspondant à l'instant $t + dt$. La distance normale dn d'un point de S'_0 à S_0 (comptée comme positive dans la région 2 et comme négative dans la région 1) sera évidemment égale à la valeur de f_0, ou, ce qui revient au même, de df_0, soit

$$dn = df_0 = f_a da + f_b db + f_c dc = - f_t dt.$$

La quantité $\frac{dn}{dt}$ est la *vitesse de propagation* de l'onde, mesurée sur l'état initial considéré. Nous la désignerons par la lettre θ ; de sorte qu'on aura

$$(52)\qquad \theta = - f_t.$$

Elle est positive ou négative, suivant que la propagation se fait de la région 1 vers la région 2 ou en sens inverse.

Si f représente le premier membre de l'équation de S_0 prise sous une

forme quelconque, il faudra, pour obtenir les cosinus directeurs α, β, γ, diviser les coefficients de (49) par $\sqrt{f_a^2 + f_b^2 + f_c^2}$. On aura donc alors

$$(52') \qquad \theta = \frac{-f_t}{\sqrt{f_a^2 + f_b^2 + f_c^2}}$$

le radical étant toujours pris avec le signe de f dans la région 2.

99. — Grâce à la présence de ce radical, la vitesse θ dépend du choix de l'état initial et, lorsque l'on change celui-ci, elle est altérée évidemment dans le même rapport que les distances normales à la surface de discontinuité.

Comme précédemment, nous prendrons le plus souvent, pour état initial, l'état actuel à l'instant considéré, en spécifiant, dans le cas du premier ordre, qu'il s'agit de l'état de la région 1.

100. — En même temps que la vitesse de propagation, on peut avoir à introduire la *vitesse de déplacement* de l'onde, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle se meut la surface de discontinuité *considérée dans l'espace actuel*.

Soient

$$(45) \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de cette surface (φ étant la valeur que prend f lorsqu'on remplace a, b, c par leurs valeurs tirées des équations (1')); S, sa position à l'instant t; S', sa position à l'instant $t + dt$. La vitesse de déplacement, que nous désignerons par T, sera le quotient par dt de la distance normale des surfaces S, S' (avec la même convention de signe que tout à l'heure).

Le raisonnement présenté ci-dessus donne évidemment pour valeur de cette vitesse

$$(53) \qquad T = \frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}.$$

La vitesse T est distincte de la vitesse de propagation, même lorsque celle-ci est comptée sur un état initial identique à l'état actuel à l'instant t. Dans ce cas, en effet, S_0 coïncide avec S; mais S'_0 ne coïncide pas avec S'. S'_0 est le lieu des positions qu'occupent, à l'instant t, les particules qui, à l'instant $t + dt$, forment la surface S'.

Il est d'ailleurs aisé de trouver la relation qui existe entre les deux vitesses. Supposons, en effet, pour simplifier, f choisi de manière à ce que f_a, f_b, f_c soient égaux aux cosinus directeurs α, β, γ de la normale à S_0 (c'est-à-dire à S)

Ces cosinus directeurs seront aussi égaux à $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ à l'instant t, puisqu'alors x, y, z ne sont autres que a, b, c. On aura $\theta = -f_t$ et $T = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Or φ n'est autre que f, exprimée à l'aide des variables x, y, z, t et, par conséquent, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ n'est autre que la dérivée $\frac{\delta f}{\delta t}$, liée à $\frac{\delta f}{\delta t} = f_t$ par la relation (**18**). On a donc

$$(54) \qquad T = -\left(f_t - u\frac{\partial \varphi}{\partial x} - v\frac{\partial \varphi}{\partial y} - w\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \theta + v_n$$

v_n désignant la composante normale à S, de la vitesse (u, v, w) au point et à l'instant considérés.

On arriverait d'ailleurs au même résultat en appliquant le théorème de la composition des mouvements. Le mouvement de S dans l'espace peut en effet être considéré comme résultant : 1° de son mouvement relatif par rapport au milieu, lequel, s'il agissait seul pendant le temps dt, amènerait S à la position S'_0 et qui n'est autre que la propagation de l'onde ; 2° de son mouvement d'entraînement, qui est le mouvement même du milieu. La vitesse normale T est donc la somme des vitesses normales de ces deux mouvements, lesquelles sont précisément θ et v_n.

100bis. — Les formules (52'), (53) sont d'ailleurs susceptibles d'une interprétation géométrique qui nous apparaîtra plus clairement si nous considérons d'abord des mouvements à deux dimensions.

Envisageons un mouvement ayant lieu dans un plan, de sorte qu'il n'y ait que deux coordonnées initiales a, b et deux coordonnées actuelles x, y. Les discontinuités que nous considérons auront alors lieu suivant des courbes dont la position, à un instant quelconque t_0, sera représentée, sur l'état initial, par S_0 (*fig.* 7).

Nous pourrons prendre comme troisième coordonnée le temps t, l'axe des t étant pris vertical et les coordonnées horizontales étant a, b. La multiplicité $\mathfrak{S}_0$ qui représente la marche de l'onde suivant une convention analogue à celle du n° **96**, sera ici une surface (*fig.* 7) dont la section S'_0 par un plan horizontal quelconque $t = t'$ donnera la nouvelle position de l'onde à l'instant correspondant. Il ne restera plus qu'à représenter cette

courbe sur le même plan où est figuré S_0, ce qui se fera évidemment en la projetant horizontalement sur ce plan en s'_0 (*fig.* 7).

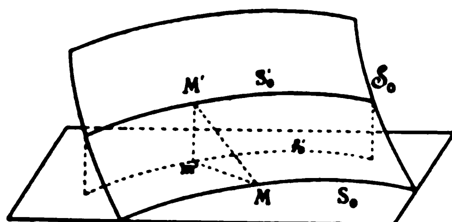


Fig. 7

Si t' est infiniment voisin de t_0, le déplacement normal dn de l'onde sera figuré par la distance normale Mm' (*fig.* 7) des courbes S_0, s'_0. Comme d'ailleurs dt n'est autre que la distance du point m' au point M' de S'_0 dont il est la projection, on voit que *la vitesse de propagation* $\frac{dn}{dt}$ n'est autre que la limite de $\frac{m'M}{m'M'}$, c'est-à-dire que l'*inverse de la pente de la surface* S_0 *par rapport au plan horizontal* (ou que la cotangente de l'angle que font cette surface et ce plan).

Or les formules de la Géométrie analytique donnent précisément, pour la quantité ainsi obtenue, une expression tout analogue à (**52'**).

Si l'on avait pris comme coordonnées horizontales les coordonnées actuelles x, y, c'est-à-dire si l'on avait construit non plus S_0, mais S, l'inverse de la pente de cette dernière aurait donné la vitesse de déplacement sous une forme analogue à (**53**).

Il est clair que ces considérations s'étendent d'elles-mêmes aux mouvements dans l'espace, sans autre difficulté que l'introduction de la géométrie à quatre dimensions, et qu'on retrouve ainsi les formules (**52'**), (**53**) telles que nous les avons écrites.

Il nous arrivera, dans la suite, d'employer les figures relatives aux mouvements plans (telles que la *fig.* 7) pour représenter les raisonnements que nous ferons sur les mouvements dans l'espace (de sorte que, parlant, dans le texte, d'une *surface* S_0, nous tracerons sur la figure une *courbe* S_0 ; et ainsi de suite).

101. — Comme précédemment, nous traiterons à part les discontinuités du premier et du second ordre.

Pour le premier ordre, x est continu, mais non ses dérivées : nous écrirons donc (n° **97**).

$$\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] : \alpha = \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right] : \beta = \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right] : \gamma = \left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] : -\theta.$$

La valeur commune des trois premiers rapports étant λ (dans le système

de notations du n° **77**) pendant que la variation de $\frac{\delta x}{\delta t}$ est désignée par λ_1, il vient

(**55**) $$\lambda_1 = -\theta\lambda.$$

De même

(**55'**) $$\left\{\begin{aligned} \mu_1 &= \left[\frac{\delta y}{\delta t}\right] = -\theta\mu \\ \nu_1 &= \left[\frac{\delta z}{\delta t}\right] = -\theta\nu \end{aligned}\right.$$

Ainsi, *les deux segments* (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ *ont la même direction. Leur rapport est égal au signe près à la vitesse de propagation* θ.

102. — Cette relation subsiste quel que soit l'état initial adopté, mais pendant que λ_1, μ_1, ν_1 seront indépendants de cet état initial, le choix de celui-ci influera au contraire sur λ, μ, ν et θ. Si l'on choisit l'état actuel de la région 1 ou celui de la région 2, la quantité θ aura, ici, deux valeurs en général différentes θ_1 et θ_2 dont le rapport est égal à la dilatation normale $1 + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$.

En raison de cette circonstance, il y a souvent avantage à introduire, pour une discontinuité du premier ordre, la vitesse de déplacement T, laquelle est indépendante du choix de l'état initial. Cette vitesse est liée à θ_1 et à θ_2 par la formule (**54**), dans laquelle v_n qui est, en général, affecté par la discontinuité, a deux valeurs différentes v_{1n} et v_{2n}. On a

(**56**) $$T = \theta_1 + v_{1n} = \theta_2 + v_{2n}$$

103. — Soit maintenant une discontinuité du second ordre. Notre lemme, appliqué à la quantité x qui est continue ainsi que ses dérivées premières, nous donne

$$\left[\frac{\delta^2 x}{\delta a^2}\right] : \alpha^2 = \dots = \left[\frac{\delta^2 x}{\delta a \delta t}\right] : -\alpha\theta = \dots = \left[\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\right] : \theta^2.$$

Or le rapport $\left[\frac{\delta^2 x}{\delta a^2}\right] : \alpha^2$, ainsi que tous les rapports analogues relatifs aux dérivées d'indice zéro, est égal à λ (n° **85**). De même, nous avons posé

$$\left[\frac{\delta^2 x}{\delta a \delta t}\right] : \alpha = \left[\frac{\delta^2 x}{\delta b \delta t}\right] : \beta = \left[\frac{\delta^2 x}{\delta c \delta t}\right] : \gamma = \lambda_1$$

et

$$\left[\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\right] = \lambda_2.$$

Donc

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{-\theta} = \frac{\lambda_2}{\theta^2}. \tag{57}$$

Comme on a pareillement

$$\left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu_1}{-\theta} = \frac{\mu_2}{\theta^2}, \\ \nu &= \frac{\nu_1}{-\theta} = \frac{\nu_2}{\theta^2}, \end{aligned}\right. \tag{57'}$$

les trois segments (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ *sont de même direction et en progression géométrique, la raison de cette progression étant* $-\theta$.

Les proportions précédentes peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc + \left[\frac{\delta}{\delta t}\right] dt\right)^2 x$$
$$= \lambda\, (\alpha da + \beta db + \gamma dc - \theta dt)^2,$$
$$\left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc + \left[\frac{\delta}{\delta t}\right] dt\right)^2 y$$
$$= \mu\, (\alpha da + \beta db + \gamma dc - \theta dt)^2,$$
$$\left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc + \left[\frac{\delta}{\delta t}\right] dt\right)^2 z$$
$$= \nu\, (\alpha da + \beta db + \gamma dc - \theta dt)^2.$$

Ces considérations se généralisent d'elles-mêmes. Pour n quelconque, *les* $n+1$ *segments* (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, ..., $(\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$ *ont la même direction et forment une progression géométrique dont la raison est égale, au signe près, à la vitesse de propagation* : on a

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda_1}{-\theta} = \ldots = \frac{\lambda_h}{(-\theta)^h} = \ldots = \frac{\lambda_n}{(-\theta)^n} \\ \mu &= \frac{\mu_1}{-\theta} = \ldots = \frac{\mu_h}{(-\theta)^h} = \ldots = \frac{\mu_n}{(-\theta)^n} \\ \nu &= \frac{\nu_1}{-\theta} = \ldots = \frac{\nu_h}{(-\theta)^h} = \ldots = \frac{\nu_n}{(-\theta)^n} \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Ces relations sont vraies, pour tout choix de l'état initial, bien que celui-ci influe sur les valeurs des quantités qui y figurent. Bien entendu, pour

les ordres supérieurs à l'unité, il est inutile, lorsqu'on prend pour état initial l'état actuel, de spécifier s'il s'agit de l'état 1 ou de l'état 2. Si on intervertissait l'ordre des deux régions, θ subirait un simple changement de signe.

104. — Le cas des discontinuités stationnaires correspond évidemment à $\theta = 0$. Or si, dans les formules (**58**), on annule θ, il vient $\lambda_h = \mu_h = \nu_h = 0$ (pour $h \geqslant 1$), On retombe donc bien sur le résultat obtenu au n° **93** : *Dans une discontinuité stationnaire d'ordre n, les seules dérivées d'ordre n qui soient discontinues sont d'indice zéro.*

105. — Le cas où les relations (**58**) sont vérifiées semble au premier abord beaucoup plus particulier que celui où les segments $(\lambda_h, \mu_h, \nu_h)$ sont quelconques. Cependant, il résulte de ce qui précède que la compatibilité doit être regardée comme la règle, et le cas contraire comme l'exception. Si, en effet, il n'y a pas compatibilité, la surface de discontinuité ne peut pas rester unique, elle se dédouble tout au moins en deux feuillets qui étaient séparés avant l'instant t et le sont de nouveau après. La discontinuité sans compatibilité qui existe à l'instant t doit donc être regardée comme étant en réalité la superposition de deux ou plusieurs autres dont les surfaces d'onde coïncident momentanément [1]. On ne saurait supposer que l'absence de compatibilité ait lieu une infinité de fois dans un intervalle de temps fini, car alors les surfaces de discontinuité, se dédoublant une infinité de fois, ne seraient pas isolées.

106. — Il y a donc lieu, dorénavant, d'admettre, sauf indication contraire, que les $n + 1$ segments ont entre eux les relations (**58**). Il en résulte, en particulier, qu'*une discontinuité est entièrement définie, en chaque point de la surface d'onde, par un segment* : le segment (λ, μ, ν) qui correspond aux dérivées d'indice 0, *et un nombre* : la vitesse de propagation.

107. — Ce segment et ce nombre peuvent d'ailleurs être quelconques : autrement dit, les équations (**58**) donnent bien, cette fois, toutes les rela-

---

(1) Un tel fait est d'ailleurs tout à fait exceptionnel : lorsque deux discontinuités se propagent indépendamment l'une de l'autre, elles ne se rencontrent, en général, que suivant une ligne, sans que les surfaces d'onde coïncident à aucun moment. (Voir chap. VII).

tions qui existent, dans une discontinuité d'ordre n, entre les variations des dérivées de cet ordre, lorsqu'on ne connaît rien sur la nature dynamique du mouvement.

Donnons nous, en effet, arbitrairement l'équation (**44**) de S_0 : nous pourrons évidemment la choisir de manière qu'à un instant déterminé, S_0 ait une position donnée et θ une valeur donnée en chaque point. Donnons-nous aussi arbitrairement, en tout point de S_0 et même de S_0 le segment (λ, μ, ν). Soient enfin X, Y, Z des fonctions de a, b, c, t continues ainsi que leurs dérivées de tous les ordres. Les équations

$$(59) \quad \begin{cases} x = X, \quad y = Y, \quad z = Z, & \text{dans la région 1} \\ x = X + \lambda \dfrac{[f(a, b, c, t)]^n}{n!} & \\ y = Y + \mu \dfrac{[f(a, b, c, t)]^n}{n!} & \text{dans la région 2} \\ z = Z + \nu \dfrac{[f(a, b, c, t)]^n}{n!} & \end{cases}$$

définissent un mouvement (et non plus seulement un système de vitesses et d'accélérations, comme au n° **89**) présentant une discontinuité d'ordre n dont les éléments sont bien ceux que nous nous étions donnés.

Nous voyons bien d'ailleurs pourquoi le mouvement ainsi défini ne cesse pas de vérifier les hypothèses générales des n°s **44-46**, quoi qu'il ne satisfasse pas aux conditions du n° **90**. La raison en est la même que celle pour laquelle, comme nous l'avons vu au n° **95**, les discontinuités qui se propagent ne donnent pas lieu à des discontinuités absolues. La continuité des vitesses ou des accélérations cesse, pour une particule quelconque, au moment où elle est atteinte par l'onde ; mais elle ne cesse que pendant un temps infiniment petit et se rétablit ensuite, de sorte que la continuité du mouvement n'en est pas troublée.

108. — Dans le cas où il n'y a pas compatibilité, la discontinuité d'ordre n se divise, en général, en discontinuités partielles qui sont également d'ordre n (les segments $(\lambda_h, \mu_h, \nu_h)$ relatifs à celles-ci ayant, pour chaque valeur de h, une somme géométrique égale au segment analogue correspondant à la discontinuité primitive[1].

Mais il est à remarquer que d'autres hypothèses sont possibles. Par exemple, une discontinuité d'ordre n peut se dédoubler en discontinuités d'ordre *supérieur* à n : une discontinuité qui porte sur les vitesses peut être remplacée par deux autres qui ne portent que sur les accélérations.

Pour nous en rendre compte, considérons, pour simplifier, un mouvement effectué suivant l'axe des abscisses, chaque point de l'état initial étant défini par une seule coordonnée a et sa position actuelle, par une seule coordonnée x. La variation de x en fonction de a et de t pourra alors être représentée par une surface.

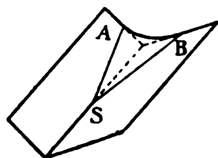


Fig. 8

Supposons que cette surface se compose de deux demi-plans formant un dièdre : nous aurons ainsi une discontinuité du premier ordre.

Par un point S de l'arête du dièdre (correspondant à une valeur a_0 de a et à une valeur t_0 de t), menons deux droites SA, SB, dans les deux faces (*fig.* 8) et relions ces deux droites par une nappe conique tangente, suivant ces deux génératrices, aux deux faces du dièdre. Nous pourrons alors supprimer les portions de celles-ci comprises entre les deux droites et la portion de l'arête (*fig.* 8) qui correspond à $t > t_0$, pour les remplacer par la nappe conique, et nous aurons ainsi un mouvement présentant, pour $t = t_0$, une discontinuité d'ordre 1 et, pour $t > t_0$, deux discontinuités d'ordre 2.

109. — Revenant au cas de la compatibilité, nous allons nous proposer de calculer les variations subies par les principaux éléments considérés dans la première partie de ce chapitre.

Densité. — Pour l'étude de la densité, nous supposerons qu'on a pris l'état actuel pour état initial.

Considérons d'abord une onde du premier ordre : nous savons que la déformation de l'état 2 par rapport à l'état 1 appartient à la catégorie étudiée au n° **56**, et nous avons appris à évaluer la dilatation normale, égale au rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ des densités. Cette dilatation s'obtient en ajoutant l'unité à la composante normale $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ de la discontinuité [1], supposée rapportée à l'état 1 du milieu : ainsi on a

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma. \tag{60}$$

Cette expression peut se transformer de diverses manières en ayant égard aux relations indiquées aux n^{os} **101-102**. Tout d'abord, en multipliant

---

[1] C'est-à-dire du segment qui, joint au nombre θ, définit la discontinuité, ainsi que nous venons de le voir.

la composante normale de la discontinuité par — θ, nous obtiendrons celle de la variation de vitesse. Donc

$$(61)\qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{[v_n]}{\theta}.$$

Dans cette formule, v_n désigne la composante normale de la vitesse et θ doit recevoir la valeur θ_1. On obtiendra évidemment la même valeur pour $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ en changeant le signe de $[v_n]$ et remplaçant θ_1 par θ_2, $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ par $\frac{\rho_2}{\rho_1}$: C'est ce que l'on vérifierait sans difficulté à l'aide des relations précédemment établies (n° **84**).

D'autre part, nous avons vu que la dilatation normale est égale au rapport des deux vitesses θ_1 et θ_2. Si nous tirons celles-ci de la double égalité (**56**), il vient

$$(62)\qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T - v_{2n}}{T - v_{1n}}$$

ou si l'on veut

$$(61')\qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 = \frac{-[v_n]}{T - v_{1n}} = \frac{-[v_n]}{\theta_1}.$$

110. On démontrerait directement le même fait en considérant la portion d'espace comprise à l'intérieur d'un petit cylindre dont les deux bases C, C' sont respectivement situées dans deux positions successives S, S' (*fig.* 9), occupées par la surface d'onde aux instants t et $t + dt$ et dont le volume est $CTdt$.

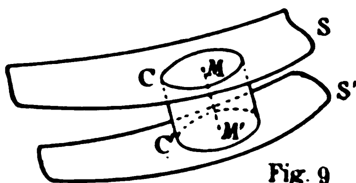


Fig. 9

Cette portion d'espace passe [1] de l'état 2 à l'état 1 pendant le temps dt.

Or, le volume entrant par la face C, sous l'état 1, a pour expression $Cv_{1n}dt$ et le volume sortant par la face C', sous l'état 2, est égal à $Cv_{2n}dt$. Quant au volume entrant ou sortant par les faces latérales, il est négligeable, si nous supposons, comme nous avons le droit de le faire, que le rapport $\frac{dt}{C}$ soit infiniment petit.

En écrivant que le volume de la partie restante varie dans un rapport inverse de celui des densités, on retombera sur la relation (62).

---

(1) Nous supposons, pour fixer les idées, la vitesse θ positive, ainsi que v_{1n}, v_{2n}.

111. — Dans les discontinuités d'ordre supérieur, la variation brusque ne porte pas sur la densité elle-même, mais seulement sur ses dérivées d'ordre $n - 1$ (si l'onde considérée est d'ordre n). La quantité $\log \frac{\rho_0}{\rho}$ étant continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 2$ inclusivement, il existera un nombre $\varkappa$ tel que l'on ait

$$\left[\frac{\delta^{n-1} \log \frac{\rho_0}{\rho}}{\delta a^p \, \delta b^q \, \delta c^r \, \delta t^h}\right] = \varkappa \, \alpha^p \, \beta^q \, \gamma^r \, (-\theta)^h. \tag{63}$$

Pour évaluer $\varkappa$, nous pourrons nous borner à considérer les dérivées d'indice zéro. Si nous prenons pour état initial celui de la région 1, la quantité $\log \frac{\rho_0}{\rho}$ sera identiquement nulle dans cette région. Mais d'autre part, la déformation de la région 2 par rapport à la région 1 ayant les propriétés étudiées au n° **59**, la valeur de $\frac{\delta^{n-1} \log \frac{\rho_0}{\rho}}{\delta a^p \, \delta b^q \, \delta c^r}$ dans la région 2 sera donnée par la formule (**17**). On a donc

$$\varkappa = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma. \tag{64}$$

Comme ρ_0 est, en général, continu ainsi que toutes ses dérivées, nous avons ainsi la variation des dérivées de $\log \frac{1}{\rho}$.

111bis. — On pourrait d'ailleurs partir également des dérivées d'indice non nul en utilisant la formule (**20**). Pour $n = 2$, celle-ci donne

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\log \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}.$$

Le second membre peut s'écrire $\frac{\delta u}{\delta a} + \frac{\delta v}{\delta b} + \frac{\delta w}{\delta c} = \frac{\delta^2 x}{\delta a \delta t} + \frac{\delta^2 y}{\delta b \delta t} + \frac{\delta^2 z}{\delta c \delta t}$ si a, b, c coïncident avec x, y, z (¹) : on retombe donc bien sur la formule (**64**). On généraliserait d'ailleurs au cas de n quelconque en différenciant un nombre de fois suffisant la formule (**20**).

Si l'on voulait le changement de densité, la discontinuité étant rapportée

(¹) Cette transformation est applicable dans les deux régions, quoique l'état initial soit celui de la région 1, grâce à ce fait qu'elle n'introduit qu'*une* différentiation par rapport à a, b, c.

à un état initial quelconque, il faudrait bien entendu, transformer les formules que nous venons de trouver, à l'aide des principes précédemment établis.

112. — Composantes de déformation. — Plus généralement, cherchons l'influence d'une discontinuité sur les composante de déformation (7) (n° **31**). Nous allons, cette fois, ne faire aucune hypothèse sur le choix de l'état initial.

Soient encore x', y', z' les coordonnées correspondant à l'état de la région 1 prolongé dans la région 2. Prenons d'abord $n = 1$: on aura, aux infiniment petits du second ordre près,

$$x = x' + \lambda f, \quad y = y' + \mu f, \quad z = z' + \nu f$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (dx' + \lambda df)^2 + (dy' + \mu df)^2 + (dz' + \nu df)^2 \\ &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2df(\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz') \\ &\quad + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\, df^2 \\ &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ &\quad + 2(f_a da + f_b db + f_c dc)(\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz') \\ &\quad + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(f_a da + f_b db + f_c dc)^2. \end{aligned}$$

Les variations subies par les composantes de déformation sont donc les demi coefficients du polynôme

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} &2(f_a da + f_b db + f_c dc)(\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz') \\ &\quad + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(f_a da + f_b db + f_c dc)^2. \end{aligned} \right.$$

113. — Mais les résultats prennent ici une forme beaucoup plus simple pour $n > 1$. Ce ne sont plus alors les composantes de déformation, mais leurs dérivées d'ordre $n - 1$ qui sont discontinues. Prenons toujours le cas le plus important, celui de $n = 2$, dans lequel

$$x = x' + \frac{\lambda f^2}{2}$$

$$y = y' + \frac{\mu f^2}{2}$$

$$z = z' + \frac{\nu f^2}{2}$$

d'où

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= dx' + \lambda f df \\ dy &= dy' + \mu f df \\ dz &= dz' + \nu f df \end{aligned} \right.$$

en négligeant des termes qui contiennent f^2 en facteur. La simplification résulte de ce que, en élevant au carré et ajoutant, on peut négliger les carrés de $\lambda f df$, $\mu f df$, $\nu f df$: on obtient :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2f df (\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz')$$

de sorte que les variations de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont les coefficients du polynôme quadratique $f df (\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz')$.

Désignons, comme au n° **47**, par a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 ; a_3, b_3, c_3 les dérivées premières de x, y, z par rapport à a, b, c : ces dérivées coïncident avec celles de x', y', z' en tout point de la surface d'onde, puisque la discontinuité est du second ordre, et l'on a

$$\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz' = \mathrm{L}da + \mathrm{M}db + \mathrm{N}dc \tag{67}$$

avec

$$\mathrm{L} = \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3, \mathrm{M} = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3, \mathrm{N} = \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3. \tag{67'}$$

df étant égal à $f_a da + f_b db + f_c dc$, les quantités dont varient ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 dans le passage de l'état 1 prolongé à l'état 2, sont (toujours aux termes près de l'ordre de f^2)

$$\left\{\begin{array}{lll} f.\mathrm{L}f_a, & f.\mathrm{M}f_b, & f.\mathrm{N}f_c \\ f.(\mathrm{M}f_c + \mathrm{N}f_b), & f(\mathrm{N}f_a + \mathrm{L}f_c), & f(\mathrm{L}f_b + \mathrm{M}f_a). \end{array}\right. \tag{68}$$

Enfin, f étant nul sur S_0 et ayant pour dérivées partielles f_a, f_b, f_c, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\frac{\delta\varepsilon_1}{\delta a}\right] : f_a = \left[\frac{\delta\varepsilon_1}{\delta b}\right] : f_b = \left[\frac{\delta\varepsilon_1}{\delta c}\right] : f_c = \mathrm{L}f_a \\
\left[\frac{\delta\varepsilon_2}{\delta a}\right] : f_a = \left[\frac{\delta\varepsilon_2}{\delta b}\right] : f_b = \left[\frac{\delta\varepsilon_2}{\delta c}\right] : f_c = \mathrm{M}f_b \\
\left[\frac{\delta\varepsilon_3}{\delta a}\right] : f_a = \left[\frac{\delta\varepsilon_3}{\delta b}\right] : f_c = \left[\frac{\delta\varepsilon_3}{\delta c}\right] : f_c = \mathrm{N}f_c \\
\left[\frac{\delta\gamma_1}{\delta a}\right] : f_a = \left[\frac{\delta\gamma_1}{\delta b}\right] : f_b = \left[\frac{\delta\gamma_1}{\delta c}\right] : f_c = \mathrm{M}f_c + \mathrm{N}f_b \\
\left[\frac{\delta\gamma_2}{\delta a}\right] : f_a = \left[\frac{\delta\gamma_2}{\delta b}\right] : f_b = \left[\frac{\delta\gamma_2}{\delta c}\right] : f_c = \mathrm{N}f_a + \mathrm{L}f_c \\
\left[\frac{\delta\gamma_3}{\delta a}\right] : f_a = \left[\frac{\delta\gamma_3}{\delta b}\right] : f_b = \left[\frac{\delta\gamma_3}{\delta c}\right] : f_c = \mathrm{L}f_b + \mathrm{M}f_a,
\end{array}\right. \tag{69}$$

résultat que l'on vérifierait, bien entendu, sans difficulté à l'aide des formules (40), (40').

Si la discontinuité était d'ordre n, il faudrait, dans les formules (66) et, par conséquent, dans les formules (68), remplacer f par $\frac{f^{n-1}}{(n-1)!}$, et les formules (69) seraient remplacées par

$$\left[\frac{\delta^{n-1}\varepsilon_1}{\delta a^p \delta b^q \delta c^r}\right] : f_a^p f_b^q f_c^r = \mathrm{L} f_a, \qquad \left[\frac{\delta^{n-1}\gamma_1}{\delta a^p \delta b^q \delta c^r}\right] : f_a^p f_b^q f_c^r = \mathrm{M} f_c + \mathrm{N} f_b$$

. . . .

Nous n'avons écrit que les formules relatives aux dérivées par rapport à a, b, c ; mais nous pouvons évidemment en déduire les variations de toutes les autres dérivées d'ordre $n - 1$, le lemme du n° 97 étant applicable à ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

On pourrait, des formules précédentes, déduire la variation de la densité (dans le cas du premier ordre) ou de ses dérivées, puisque la dilatation est une fonction des composantes de déformation.

113bis. — Même lorsque la discontinuité est du premier ordre, le résultat est tout semblable à celui que nous venons d'écrire, si cette discontinuité est très petite, de manière qu'on puisse négliger les carrés de λ, μ, ν. Le polynôme (65) se réduit alors à sa partie linéaire par rapport à ces trois quantités et il vient (en tenant compte de (67))

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\varepsilon_1] = \mathrm{L} f_a,\ [\varepsilon_2] = \mathrm{M} f_b,\ [\varepsilon_3] = \mathrm{N} f_c, \\ [\gamma_1] = \mathrm{M} f_c + \mathrm{N} f_b,\ [\gamma_2] = \mathrm{N} f_a + \mathrm{L} f_c,\ [\gamma_3] = \mathrm{L} f_b + \mathrm{M} f_a. \end{array} \right.$$

114. Rotation moléculaire. — Soit une discontinuité du second ordre : prenons pour état initial l'état actuel en supposant toujours que f_a, f_b, f_c sont égaux aux cosinus directeurs α, β, γ de la normale à l'onde. Les composantes

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

de la rotation moléculaire s'écrivent ici

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 z}{\delta b \,\delta t} - \frac{\delta^2 y}{\delta c\, \delta t}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 x}{\delta c\, \delta t} - \frac{\delta^2 z}{\delta a\, \delta t}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 y}{\delta a\, \delta t} - \frac{\delta^2 x}{\delta b\, \delta t}\right).$$

Sa variation sera donc d'après nos formules

$$(70) \quad [p] = \frac{\theta}{2}(\mu\gamma - \nu\beta), \quad [q] = \frac{\theta}{2}(\nu\alpha - \lambda\gamma), \quad [r] = \frac{\theta}{2}(\lambda\beta - \mu\alpha).$$

L'interprétation géométrique de ces expressions est bien connue : si l'on mène, avec le point considéré comme origine, le segment (λ, μ, ν) qui caractérise la discontinuité et d'autre part, un segment normal à l'onde et de grandeur $\frac{\theta}{2}$, *la variation de rotation moléculaire est égale au moment d'un de ces segments par rapport à l'extrémité de l'autre.*

Ou, si l'on veut, *la variation de rotation moléculaire s'obtient en faisant tourner d'un angle droit, dans le plan tangent à l'onde la projection du segment* (λ, μ, ν) *sur ce plan, et la multipliant par* $\frac{\theta}{2}$.

On voit que *la variation de rotation moléculaire est toujours un segment tangent à la surface de discontinuité.*

Il est clair qu'on écrirait sans difficulté des formules analogues à (**70**), pour les variations des dérivées de p, q, r dans les discontinuités d'ordre supérieur à 2.

115. — La *direction d'une discontinuité* est celle du segment (λ, μ, ν) qui la caractérise, direction que nous savons être aussi celle des segments $\lambda_1, \mu_1, \nu_1), \ldots (\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$.

Si cette direction est normale à la surface d'onde S, *considérée dans l'état actuel*, la discontinuité sera dite *longitudinale* ; si elle lui est tangente, la discontinuité sera dite *transversale.*

Il résulte des formules obtenues ci-dessus qu'*une discontinuité longitudinale est sans influence sur la rotation moléculaire* et qu'*une discontinuité transversale est sans influence sur la densité.*

116. Signe d'une discontinuité. — Etant donnée une discontinuité d'ordre quelconque ayant lieu à l'instant t, imaginons qu'à partir de cet instant, chaque molécule continue à se mouvoir avec la même vitesse et la même accélération initiales, autrement dit, qu'on rende ces vitesses et ces accélérations continues par rapport au temps.

Comme il a été remarqué au n° **90**, le mouvement fictif ainsi obtenu ne vérifierait plus, en général, les hypothèses énoncées aux n^os^ **44-46**. Ou bien les deux milieux partiels 1 et 2 pénétreraient l'un dans l'autre ; ou

bien, au contraire, ils s'écarteraient l'un de l'autre et cesseraient d'être contigus.

Dans le premier cas, la discontinuité considérée sera dite *positive* ou *comprimante*; dans le second, *négative* ou *dilatante*.

D'après cette définition, le signe d'une discontinuité n'est pas modifié lorsqu'on intervertit les rôles des deux régions qu'elle sépare. Il changerait si l'on renversait le mouvement, c'est-à-dire si l'on substituait les instants antérieurs aux instants postérieurs et inversement (ce qui revient à changer le signe de t dans les équations du mouvement).

Il est évident, d'après ce que nous avons dit au n° **91**, que le signe en question est lié au sens de la différence qui existe entre les deux valeurs de la composante normale de la vitesse ou de l'une des accélérations successives. Pour obtenir la forme exacte de cette relation, il suffit de reprendre les raisonnements présentés en cet endroit.

Soient S_1 la surface limite du milieu 1 (laquelle coïncide à l'instant donné t_0 avec la surface de discontinuité S dans notre mouvement fictif, (x_1, y_1, z_1) un quelconque de ses points;

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \tag{71}$$

son équation.

Convenons, pour fixer les idées, que le milieu 1 sera situé, par rapport à cette surface, du côté $\varphi < 0$.

Soient encore S_2 la surface limite du milieu 2; (x_2, y_2, z_2) celui de ses points qui, à l'instant t_0, coïncide avec (x_1, y_1, z_1), ce point étant également supposé animé de notre mouvement fictif. Il y aura pénétration des deux milieux, si l'on a, pour $t = t_0 + \varepsilon$,

$$\varphi(x_2, y_2, z_2, t) < 0. \tag{72}$$

Il suffit, pour cela, que la dérivée du premier membre, si elle ne s'annule pas pour $t = t_0$, soit négative. Comme le premier membre de l'équation (**71**) est supposé identiquement nul, ceci donne (comparer l'équation (**46**))

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] < 0. \tag{73}$$

Mais φ étant supposé négatif du côté de la région 1, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ont les signes des cosinus directeurs de la normale à S dirigée vers la région 2 : donc l'inégalité (**73**) exprime que, *dans le passage de la région* 1 *à la*

région 2, la composante normale de la vitesse augmente d'un segment dirigé vers la région 1.

Si au contraire le changement de composante normale de la vitesse a lieu vers la région 2 quand on entre dans cette dernière région, la quantité $\varphi(x_2, y_2, z_2, t)$ sera positive à l'instant $t_0 + \varepsilon$, et par conséquent le point (x_2, y_2, z_2) sera extérieur à la nouvelle position occupée par le milieu 1 à cet instant. En un mot, la discontinuité sera dilatante.

Si maintenant, la composante normale de la vitesse restant continue, l'inégalité (**73**) est remplacée par une égalité, il faudra exprimer que la dérivée seconde de $\varphi(x_2, y_2, z_2, t)$ est négative. A cet effet, on n'aura, comme au nº **94**, qu'à différentier deux fois l'équation (**71**) et l'inégalité (**72**). Dans le cas où la vitesse elle-même (et non plus seulement sa composante normale) est continue, on obtient ainsi évidemment (comparer l'équation (**47**)), pour une discontinuité comprimante,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] < 0$$

et, pour une discontinuité dilatante,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 x}{dt^2}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] > 0.$$

Celles-ci expriment les mêmes conditions que tout à l'heure, sauf que la vitesse est remplacée par l'accélération.

Si cette dernière, à son tour, était continue, il suffirait de la remplacer par l'accélération du troisième ordre ; et ainsi de suite.

117. — Les considérations précédentes subsistent (ainsi qu'il nous est utile, pour la suite, de le remarquer) qu'il y ait ou non compatibilité.

Il n'y a, bien entendu, pas lieu de parler des discontinuités stationnaires, qui, d'après ce qui précède, ne sont ni comprimantes, ni dilatantes.

S'il y a compatibilité, on peut donner au résultat une forme un peu différente.

Prenons, pour fixer les idées, le cas du premier ordre : la différence des deux vitesses normales est égale à $-\theta$, multiplié par la composante normale du segment (λ, μ, ν). Or cette dernière est égale à $\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1$.

Donc, la discontinuité est dilatante ou comprimante, suivant que la pro-

pagation se fait vers la région la plus dense ou vers la région la moins dense.

Dans une discontinuité du second ordre, ce n'est plus la vitesse, mais l'accélération qui est discontinue. De même, si la discontinuité est d'ordre n, elle portera seulement sur l'accélération d'ordre n et son signe dépendra par conséquent, de celui qu'aura la composante normale du segment $(\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$.

D'autre part, considérons les dérivées successives de la densité par rapport au temps. Les $n - 2$ premières d'entre elles sont continues : pour la $n - 1^{ème}$, on a (n° **111**)

$$\left[\frac{\delta^{n-1} \log \frac{1}{\rho}}{\delta t^{n-1}}\right] = (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)(-\theta)^{n-1}$$

ce qui, d'après les formules (**58**), peut s'écrire

$$\left[\frac{\delta^{n-1} \log \frac{1}{\rho}}{\delta t^{n-1}}\right] = -\frac{1}{\theta}(\lambda_n\alpha + \mu_n\beta + \nu_n\gamma).$$

La discontinuité sera comprimante si la parenthèse du second membre est négative, c'est-à-dire *si la propagation se fait vers la région ou la dérivée $n - 1^{ème}$ de la dilatation par rapport au temps est la plus grande.*

118. — On peut rattacher aux considérations précédentes certaines remarques simples relatives au dédoublement d'une discontinuité.

Considérons, par exemple, une discontinuité du premier ordre comprimante. Supposons qu'il n'y ait pas compatibilité, mais que le dédoublement ait lieu en deux ondes seulement, et que, de plus, ces deux ondes se propagent en sens inverses. Il est clair que l'une au moins d'entre elles devra être comprimante. Pour celle-ci, la propagation se fera vers la région la moins dense et, par conséquent, *l'état intermédiaire qui prendra naissance entre les deux ondes sera plus condensé que l'un au moins des deux premiers.*

Il sera, au contraire, moins condensé que l'un au moins d'entre eux si la discontinuité donnée est dilatante.

§ 4. — ÉTUDE DES DISCONTINUITÉS (*Suite*) CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ D'ORDRE SUPÉRIEUR

119. — Nous avons, dans ce qui précède, étudié une discontinuité d'ordre n au point de vue de ses effets sur les dérivées d'ordre n. Quelles relations cette discontinuité entraîne-t-elle entre les variations des dérivées d'ordre supérieur à n (en supposant que celles-ci prennent, comme les premières, des valeurs déterminées de chaque côté de l'onde) ?

Ces relations sont notablement plus compliquées que les premières. Nous ne les formerons que dans les cas les plus simples.

Considérons une discontinuité du premier ordre et introduisons les dérivées secondes. Nous avons trouvé, pour les conditions qui regardent la variable x

$$(36) \qquad \left[\frac{\delta x}{\delta a}\right] = \lambda f_a, \quad \left[\frac{\delta x}{\delta b}\right] = \lambda f_b, \quad \left[\frac{\delta x}{\delta c}\right] = \lambda f_c.$$

$$(74) \qquad \left[\frac{\delta x}{\delta t}\right] = \lambda f_t$$

dont les trois premières proviennent des conditions identiques, la dernière des conditions cinématiques de compatibilité.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que f représente (rigoureusement cette fois) la distance du point a, b, c à S_0. Dans ces conditions, nous pouvons remarquer que $\frac{\delta^2 f}{\delta a \delta t}, \frac{\delta^2 f}{\delta b \delta t}, \frac{\delta^2 f}{\delta c \delta t}$, dérivées par rapport au temps des cosinus directeurs de la normale à la surface $f = \text{const.}$ seront connues lorsque f_t sera donné sur toute cette surface. Il en sera de même, bien entendu, des dérivées secondes de f par rapport à a, b, c. Toutes ces quantités seront donc connues lorsqu'on donnera S_0 et les premiers membres des équations (36), (74).

Nous composerons avec elles les formes différentielles

$$(75) \quad \begin{cases} f_1(da, db, dc) = f_a da + f_b db + f_c dc, \\ f_2(da, db, dc) = \left(\frac{\delta}{\delta a} da + \frac{\delta}{\delta b} db + \frac{\delta}{\delta c} dc\right)^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta a^2} da^2 + \ldots.. \\ f'_1(da, db, dc) = \frac{\delta^2 f}{\delta a \delta t} da + \frac{\delta^2 f}{\delta b \delta t} db + \frac{\delta^2 f}{\delta c \delta t} dc, \end{cases}$$

et nous considérerons également les formes analogues contenant les variations des dérivées de x

$$(76)\quad \begin{cases} \xi_2(da, db, dc) = \left(\left[\dfrac{\partial}{\partial a}\right] da + \left[\dfrac{\partial}{\partial b}\right] db + \left[\dfrac{\partial}{\partial c}\right] dc\right)^2 x \\ \xi'_1(da, db, dc) = \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right] da + \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\right] db + \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t}\right] dc. \end{cases}$$

Formons d'abord les conditions identiques. Différencions deux fois l'équation $[x] =$ const. sur la surface S_0 : nous voyons que l'on doit avoir

$$\xi_2 + \left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] d^2a + \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right] d^2b + \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right] d^2c = 0,$$

moyennant les relations

$$(77)\qquad f_1 = f_a\,da + f_b\,db + f_c\,dc = 0$$

et

$$(78)\qquad f_2 + f_a\,d^2a + f_b\,d^2b + f_c\,d^2c = 0.$$

En vertu des relations (86), ceci revient à dire que l'équation (77) entraîne $\xi_2 - \lambda f_2 = 0$. Il faut, pour cela, qu'il existe un polynôme linéaire $A da + B db + C dc$ tel que l'on ait, quels que soient da, db, dc,

$$(79)\qquad \xi_2 = \lambda f_2 + 2 f_1 (A da + B db + C dc).$$

Différencions également sur S_0 la première équation (86) : la différentielle de $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} da + \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} db + \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial c} dc = \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial da}$$

et de même la différentielle de $\left[\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]$ est $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial (da)}$. On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \xi_2}{\partial (da)} = f_a\,d\lambda + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial f_2}{\partial (da)}.$$

Mais en dérivant par rapport à da, l'identité (79), on a (puisque $f_1 = 0$)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \xi_2}{\partial (da)} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial f_2}{\partial (da)} + f_a (A da + B db + C dc),$$

la comparaison de ces deux formules donne

(80) $$d\lambda = A\,da + B\,db + C\,dc \qquad (\text{sur } S_0).$$

Les formules (79) et (80), ainsi que les formules analogues relatives à y, z (lesquelles introduiraient six autres coefficients auxiliaires analogues à A, B, C) sont les conditions identiques.

120. — Passons aux conditions de compatibilité. Nous devons, à cet effet, compléter le calcul précédent, d'une part en différentiant sur $\mathfrak{S}_0$ et non sur S_0, d'autre part en utilisant (74). Différentiant d'abord cette dernière sur S_0, il vient

$$\xi'_1 = f_t d\lambda + \lambda f'_1 = \lambda f'_1 + f_t(A\,da + B\,db + C\,dc).$$

Ceci devant avoir lieu pour toutes les valeurs de da, db, dc qui vérifient la condition (77), on a, en introduisant la quantité auxiliaire λ'

(81) $$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right] = \lambda \dfrac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial t} + A f_t + \lambda' f_a, \\ \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\right] = \lambda \dfrac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial t} + B f_t + \lambda' f_b, \\ \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t}\right] = \lambda \dfrac{\partial^2 f}{\partial c\,\partial t} + C f_t + \lambda' f_c. \end{cases}$$

Faisons maintenant varier a, b, c, t sur $\mathfrak{S}_0$, nous devrons avoir, non plus (77), mais

(77') $$f_1 + f_t\,dt = 0.$$

La première équation (36), différentiée dans ces nouvelles conditions, donnera (d'après (81))

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \xi_2}{\partial (da)} + \left(\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial t} + A f_t + \lambda' f_a\right) dt = f_a\,d\lambda + \lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial (da)} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial t}\right).$$

Remplaçons ξ_1 par son expression (79) et tenons compte de (77'), nous avons, toutes réductions faites

(80') $$A\,da + B\,db + C\,dc + \lambda' dt = d\lambda \qquad (\text{sur } \mathfrak{S}_0).$$

Si nous supposons connues les variations brusques des dérivées secondes de x, tout est connu (grâce aux équations (79) et (81)) dans le premier membre de (80'), et nous avons par là la variation infinitésimale de λ lorsque le temps varie.

Reprenons enfin l'équation (74) pour la différentier sur S_0, ce qui donne (en tenant compte de (80'))

$$\xi'_1 + \left[\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\right] dt = f_t\,(A da + B db + C dc + \lambda' dt) + \lambda\left(f'_1 + \frac{\delta^2 f}{\delta t^2}\,dt\right).$$

Remplaçons ξ'_1 par sa valeur tirée de (81) et tenons compte de (77') : il ne reste que les termes en dt, qui donnent

$$\left[\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\right] = 2\lambda' f_t + \lambda\,\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} \tag{82}$$

Supposant toujours connues les dérivées secondes de x, cette formule nous fait connaître $\frac{\delta^2 f}{\delta t^2}$, c'est-à-dire le mouvement de la surface d'onde aux éléments infinitésimaux du troisième ordre près. Mais on aurait également $\frac{\delta^2 f}{\delta t^2}$ par les équations analogues correspondant à y et z. En égalant entre elles les expressions ainsi trouvées, on a deux nouvelles conditions de compatibilité.

Si l'on pose

$$\tag{83}\left\{\begin{aligned} X_2 &= \xi_2 + 2\xi'_1 dt + \left[\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\right] dt^2 \\ &= \left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc + \left[\frac{\delta}{\delta t}\right] dt\right)^2 x \\ F_2 &= f_2 + 2 f'_1 dt + \frac{\delta^2 f}{\delta t^2} dt^2 = \left(\frac{\delta}{\delta a} da + \frac{\delta}{\delta b} db + \frac{\delta}{\delta c} dc + \frac{\delta}{\delta t} dt\right)^2 f \\ F_1 &= f_1 + f_t\, dt \end{aligned}\right.$$

les résultats précédents se résument dans l'identité

$$X_2 = \lambda F_2 + 2F_1\,(A da + B db + C dc + \lambda' dt). \tag{79'}$$

121. Conditions du troisième ordre. — Adjoignons maintenant aux formes (75), (76) les suivantes

$$f_3 = \left(\frac{\delta}{\delta a} da + \frac{\delta}{\delta b} db + \frac{\delta}{\delta c} dc\right)^3 f$$

$$f'_2 = \left(\frac{\delta}{\delta a} da + \frac{\delta}{\delta b} db + \frac{\delta}{\delta c} dc\right)^2 \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\delta^3 f}{\delta a^2 \delta t} da^2 + \dots.$$

$$\xi_3 = \left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc\right)^3 x = \left[\frac{\delta^3 x}{\delta a^3}\right] da^3 + \dots.$$

$$\xi'_2 = \left(\left[\frac{\delta}{\delta a}\right] da + \left[\frac{\delta}{\delta b}\right] db + \left[\frac{\delta}{\delta c}\right] dc\right)^2 \frac{\delta x}{\delta t} = \left[\frac{\delta^3 x}{\delta a^2 \delta t}\right] da^2 + \dots.$$

Différentions trois fois, sur S_0, la relation $[x] = 0$: il vient

$$\xi_3 + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial(da)} d^2a + \frac{\partial \xi_2}{\partial(db)} d^2b + \frac{\partial \xi_2}{\partial(dc)} d^2c\right)$$
$$+ \left[\frac{\delta x}{\delta a}\right] d^3a + \left[\frac{\delta x}{\delta b}\right] d^3b + \left[\frac{\delta x}{\delta c}\right] d^3c = 0,$$

cela moyennant les équations (77), (78) et

(84) $$\begin{cases} f_3 + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial(da)} d^2a + \dfrac{\partial f_2}{\partial(db)} d^2b + \dfrac{\partial f_2}{\partial(dc)} d^2c\right) \\ \qquad + f_a d^3a + f_b d^3b + f_c d^3c = 0. \end{cases}$$

Les différentielles troisièmes s'éliminent immédiatement par les conditions (36) : remplaçant ξ_2 par sa valeur (79), nous avons la relation

$$\xi_3 = \lambda f_3 + 3 f_2 (A da + B db + C dc)$$

laquelle doit subsister moyennant (77) : autrement dit, nous pouvons écrire

(85) $$\xi_3 = \lambda f_3 + 3 f_2 (A da + B db + C dc) + 3 f_1 \psi_2$$

$\psi_2(da, db, dc)$ étant une forme quadratique en da, db, dc.

Pour avoir la signification de ψ_2, considérons l'équation (79) qui est une identité par rapport à da, db, dc. Changeons y da, db, dc en $d'a$, $d'b$, $d'c$, puis différentions sur S_0 (sans faire varier $d'a$, $d'b$, $d'c$) : ceci donne

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial(d'a)} da + \frac{\partial \xi_3}{\partial(d'b)} db + \frac{\partial \xi_3}{\partial(d'c)} dc\right)$$
$$= f_2(d'a, d'b, d'c)(A da + B db + C dc)$$
$$+ \frac{\lambda}{3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial(d'a)} da + \frac{\partial f_3}{\partial(d'b)} db + \frac{\partial f_3}{\partial(d'c)} dc\right)$$
$$+ 2 f_1(d'a, d'b, d'c)(dA\, d'a + dB\, d'b + dC\, d'c)$$
$$+ (A\, d'a + B\, d'b + C\, d'c)\left(\frac{\partial f_2}{\partial(da)} d'a + \frac{\partial f_2}{\partial(db)} d'b + \frac{\partial f_2}{\partial(dc)} d'c\right).$$

Si nous remplaçons ξ_3 par sa valeur (85), le polynôme $f_1(d'a, d'b, d'c)$ vient en facteur et l'équation se réduit à

$$dA\, d'a + dB\, d'b + dC\, d'c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial(da)} d'a + \frac{\partial \psi_2}{\partial(db)} d'b + \frac{\partial \psi_2}{\partial(dc)} d'c\right).$$

$d'a$, $d'b$, $d'c$ étant arbitraires, on a

(86) $$dA = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi_2}{\partial(da)}, \quad dB = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi_2}{\partial(db)}, \quad dC = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi_2}{\partial(dc)} \quad (\text{sur } S_0)$$

équation d'où on peut déduire la valeur de $d^2\lambda$ (en vertu de (80'))

(87) $$d^2\lambda = A d^2a + B d^2b + C d^2c + \psi_2.$$

Ayant ainsi les conditions identiques, nous obtiendrons les conditions de compatibilité en différentiant, sur S_0, toutes les conditions (79) à (82).

Nous ferons le calcul d'un coup en introduisant les expressions (83) et

$$X_3 = \xi_3 + 3\,\xi'_2\,dt + 3\left(\left[\frac{\partial^3 x}{\partial a\,\partial t^2}\right] da + \dots\right) dt^2 + \left[\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\right] dt^3$$

$$= \left(\left[\frac{\partial}{\partial a}\right] da + \left[\frac{\partial}{\partial b}\right] db + \left[\frac{\partial}{\partial c}\right] dc + \left[\frac{\partial}{\partial t}\right] dt\right)^3 x$$

$$F_3 = f_3 + 3 f'_2\, dt + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial a\,\partial t^2} da + \frac{\partial^3 f}{\partial b\,\partial t^2} db + \frac{\partial^3 f}{\partial c\,\partial t^2} dc\right) dt^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} dt^3$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc + \frac{\partial}{\partial t} dt\right)^3 f.$$

Nous pourrons alors récrire les formules précédentes en remplaçant les ξ par des X, les f par des F, et introduisant des termes en dt, d^2t, d^3t, partout où il en existe en da, db, dc ; d^2a, d^2b, d^2c ; d^3a, d^3b, d^3c. De cette façon l'identité (85) sera remplacée par

(85') $$X_3 = \lambda F_3 + 3\,F_2\,(A\,da + B\,db + C\,dc + \lambda' dt) + 3\,F_1\,\Psi_2,$$

Ψ_2 étant une forme quadratique en da, db, dc, dt.

La comparaison de la formule précédente avec (85) montre que, dans Ψ_2, la partie indépendante de dt n'est autre que ψ_2 : on pourra poser

(88) $$\Psi_2 = \psi_2 + 2\,dt\,(A'da + B'db + C'dc) + \lambda'' dt^2.$$

En continuant à suivre la marche exposée tout à l'heure, on verra que les différentielles complètes de A, B, C, λ' sur S_0 sont

(86') $$\begin{cases} dA = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial (da)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial (da)} + A'dt \\[2ex] dB = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial (db)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial (db)} + B'dt \\[2ex] dC = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial (dc)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial (dc)} + C'dt \\[2ex] d\lambda' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial (dt)} = A'da + B'db + C'dc + \lambda''dt \end{cases}$$

de sorte que (comparer (87)),

(87') $$\Psi_2 + A\,d^2a + B\,d^2b + C\,d^2c + \lambda'\,d^2t = d^2\lambda \quad (\text{sur } S_0).$$

Enfin, si on égale, dans (**85'**), les coefficients des différentes puissances de dt, on a, outre l'identité (**85**), les relations

$$
(89)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi'_2 &= \lambda f_2' + \lambda' f_2 + 2f_1'(\mathrm{A}da + \mathrm{B}db + \mathrm{C}dc) + f_t \psi_2 \\
&\quad + 2f_1(\mathrm{A}'da + \mathrm{B}'db + \mathrm{C}'dc), \\
\left[\frac{\partial^3 x}{\partial a\, \partial t^2}\right] &= \lambda \frac{\partial^3 f}{\partial a\, \partial t^2} + \mathrm{A}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\lambda' \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial t} + 2\mathrm{A}' f_t + \lambda'' f_a, \\
\left[\frac{\partial^3 x}{\partial t^2}\right] &= 3\lambda' \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 3\lambda'' f_t + \lambda \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}.
\end{aligned}
\right.
$$

Etant donnée, *à l'instant t*, la position de la surface de discontinuité, ces différentes formules et leurs analogues relatives à y, z, permettront de calculer, en fonction des variations brusques des dérivées premières, secondes et troisièmes des coordonnées, les paramètres A', B', C', λ' et leurs analogues. On pourra même, entre elles, éliminer ces quantités, de manière à obtenir des conditions de compatibilité. Enfin, la dernière des formules (**89**) fait connaître $\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$, c'est-à-dire l'accélération du troisième ordre de la surface d'onde, et on aura deux autres conditions de compatibilité en égalant la valeur ainsi trouvée à celle qu'on déduirait des équations analogues relatives à y et à z.

122. Si ces conditions n'étaient pas remplies, la surface de discontinuité *du premier ordre* pourrait rester unique. Mais il s'y adjoindrait nécessairement au moins une onde d'ordre supérieur, se séparant de la première aux instants voisins de celui que l'on considère.

123. Cas d'une onde du second ordre. — Proposons-nous encore de trouver les conditions du troisième ordre dans une discontinuité du second.

C'est à quoi nous pourrions arriver par des calculs analogues à ceux que nous venons de faire ; mais nous pourrons aussi déduire ce résultat du précédent : car on obtient une discontinuité du second ordre en faisant, dans les formules (**79**) et (**79'**), $\lambda = 0$ (les quantités analogues μ et ν étant également nulles).

Les conditions du second ordre devront alors coïncider avec celles des nos **85, 86, 103**. C'est en effet ce qu'il est aisé de constater : il suffit de remarquer que, d'après la relation (**80'**), $\mathrm{A}da + \mathrm{B}db + \mathrm{C}dc + \lambda' dt$ doit s'annuler moyennant la condition (**77'**). On peut donc écrire

$$
(90)\qquad \mathrm{A} = \frac{\lambda}{2} f_a, \quad \mathrm{B} = \frac{\lambda}{2} f_b, \quad \mathrm{C} = \frac{\lambda}{2} f_c, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{2} f_t
$$

(où, bien entendu, λ n'est plus la quantité que nous avions désignée tout à l'heure sous ce nom et qui est ici nulle). La relation (**79'**) devient alors

$$X_2 = \lambda F_1^2$$

ce qui est bien le résultat trouvé au n° **103**.

Considérons maintenant l'expression Ψ_2 qui figure dans les conditions du troisième ordre. D'après (**87'**), cette expression doit être telle que

$$\Psi_2 + A d^2 a + B d^2 b + C d^2 c + \lambda' d^2 t = d^2 \lambda$$

s'annule moyennant les relations $F_1 = 0$ et

$$F_2 + f_a d^2 a + f_b d^2 b + f_c d^2 c + f_t d^2 t = 0.$$

D'après les valeurs (**90**) de A, B, C, λ', ceci donne

$$\text{(91)} \qquad \Psi_2 = \frac{\lambda}{2} F_2 + F_1 (A_1 da + B_1 db + C_1 dc + \lambda'_1 dt),$$

A_1, B_1, C_1, λ'_1 désignant de nouveaux paramètres.

Les relations (**86'**) se réduisent alors toutes trois (puisque par exemple $A = \frac{\lambda}{2} f_a$ et que $df_a = \frac{1}{2} \frac{\partial F_2}{\partial\, da}$) à

$$d\lambda = A_1 da + B_1 db + C_1 dc + \lambda'_1 dt$$

et les relations (**85**), (**85'**) deviennent

$$X_3 = 3\lambda F_1 F_2 + 3 F_1^2 (A_1 da + B_1 db + C_1 dc + \lambda'_1 dt),$$
$$\xi_3 = 3\lambda f_t f_2 + 3 f_t^2 (A_1 da + B_1 db + C_1 dc)$$
$$\xi'_2 = \lambda f_t f_2 + 2 f_t [\lambda f_t' + f_t (A_1 da + B_1 db + C_1 dc)] + f_t^2 \lambda'_1$$
$$\left[\frac{\partial^3 x}{\partial a\, \partial t^2}\right] = A_1 f_t^2 + 2\lambda f_t \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial t} + f_a \left(\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\lambda'_1 f_t\right)$$
$$\left[\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\right] = 3 f_t \left(\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \lambda'_1 f_t\right).$$

Ces équations ne donnent naturellement plus $\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$, mais seulement $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, lequel figure dans les deux dernières et, par conséquent, peut se tirer de six équations différentes (en comptant celles qui correspondent à y et z).

De plus, le départ entre les conditions identiques et les conditions de compatibilité est différent de ce qu'il était dans le cas précédent. La condition (**74**) est, en effet, donnée, et fournit par conséquent, des conditions identiques, au lieu de faire partie des conditions de compatibilité.

CHAPITRE III

—

LA MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME DE L'HYDRODYNAMIQUE

§ 1. LES ÉQUATIONS INTERNES ET LA CONDITION SUPPLÉMENTAIRE

124. — On sait que les équations de l'Hydrodynamique se déduisent de celles de l'Hydrostatique par application du principe de d'Alembert. Cette déduction, sur laquelle nous n'avons pas à insister ici, conduit comme il est bien connu aux équations suivantes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\delta^2 z}{\delta t^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

où les symboles ∂, δ ont la même signification qu'au chapitre II. Les quantités $u = \frac{\delta x}{\delta t}$, $v = \frac{\delta y}{\delta t}$, $w = \frac{\delta z}{\delta t}$ désignent les composantes de la vitesse, de sorte que $\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}$, par exemple, est égal à $\frac{\delta u}{\delta t}$; l'équation (**18**) du chapitre II permet encore d'écrire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\delta^2 z}{\delta t^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

La quantité ρ, qui est la densité, s'exprime par les équations (3) et (3') du n° 17, soit ici

$$(3) \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Les équations (1) et (3) (après que l'on aura exprimé $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ à l'aide des dérivées partielles de p, x, y, z par rapport à a, b, c), jointes à une équation supplémentaire qui reste à former, sont celles qui définissent les quantités inconnues x, y, z, p, ρ en fonction de a, b, c, t. Mais on sait qu'il est le plus souvent avantageux de substituer à ce mode de mise en équation, qui est celui de Lagrange, la mise en équation d'Euler dans laquelle a, b, c ne figurent pas, les variables indépendantes étant x, y, z, t les fonctions inconnues p, ρ, et les composantes u, v, w de la vitesse.

Dans cette manière d'opérer, les équations (1) seront remplacées par les équations (2), et quant à l'équation (3) qui définit ρ, elle sera remplacée par l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

formée au n° 62. Cette dernière, qui est dite *équation de continuité*, n'est donc autre que celle qui exprime la conservation de la masse.

123. — Les équations (1) et (3), s'il s'agit de la forme de Lagrange, (2) et (4) s'il s'agit de la forme d'Euler, sont en nombre insuffisant pour déterminer les fonctions inconnues, puisque celles-ci sont au nombre de cinq, et il est en effet nécessaire de leur adjoindre une cinquième équation dite *condition supplémentaire*. Cette dernière condition est celle par laquelle intervient la nature physique du fluide, sur laquelle il n'est rien supposé dans la formation des équations écrites jusqu'ici.

Pour les liquides (supposés parfaitement incompressibles) cette équation est

$$\rho = \text{constante}.$$

En ce qui concerne les fluides compressibles, la formation de la condition supplémentaire comporte plus de difficulté. On sait que l'on considère

alors le fluide comme caractérisé, au point de vue physique, par une relation de la forme

$$F(p, \rho, T) = 0 \tag{5}$$

entre la densité ρ d'une portion de fluide, la pression p et la température T. Par exemple, pour les gaz parfaits, cette relation est

$$\frac{p}{\rho T} = \text{constante.} \tag{5'}$$

Cette relation fournit la condition supplémentaire cherchée si l'on connaît, d'autre part, la loi suivant laquelle varie la température. Lorsqu'on suppose celle-ci constante, ainsi qu'on l'avait fait jusqu'à Laplace, la condition supplémentaire est donnée par la loi de Mariotte

$$\frac{p}{\rho} = \text{constante,} \tag{6}$$

Si au contraire — et les recherches sur la vitesse du son ont prouvé que cette hypothèse était bien plus près de la réalité que la première — on admet que le gaz a une conductibilité nulle, de sorte que les dégagements ou absorptions de chaleur produits par la contraction ou la dilatation de ses différentes parties servent uniquement à échauffer ou à refroidir les molécules même qui en sont le siège (contraction ou dilatation *adiabatique*), on constate que la relation (6) doit être remplacée par la suivante

$$\frac{p}{\rho^m} = \text{constante} \tag{7}$$

m étant un coefficient constant (le rapport des deux chaleurs spécifiques du gaz).

126. — On doit noter une différence essentielle qui sépare l'équation (7) des équations (5') et (6). La constante qui figure au second membre de (5') est une constante absolue, connue *a priori* pour un gaz de nature donnée. C'est, à un facteur constant près, ce que l'on nomme souvent la *densité* de ce gaz, c'est-à-dire le rapport du poids d'un volume quelconque de fluide au même volume d'air dans les mêmes conditions de température et de pression. Il en est de même pour celle que renferme l'équation (6), si l'on donne la température. Au contraire, la constante qui s'introduit dans l'équation (7) est une constante d'intégration, qui dépend de l'état primitif à partir duquel le fluide a varié adiabatiquement. Si cet état était unique pour toute la masse, il en est de même pour la constante en question.

Mais il n'est nullement nécessaire qu'il en soit ainsi : dans le cas contraire, le second membre de l'équation (7), indépendant de t, *est une fonction de* a, b, c.

127. — Mais l'une et l'autre des formules (6) et (7) présupposent la relation (5). Or l'existence même de celle-ci n'est pas sans soulever quelques objections en Hydrodynamique. Elle est, il est vrai, indubitable du moins dans les conditions où se place l'Hydromécanique rationnelle) toutes les fois qu'il y a équilibre, et, par exemple pour les gaz parfaits, la relation (5) a été établie par une série d'expériences dans lesquelles on a comparé entre eux divers états d'équilibre d'un même gaz. Mais aucune expérience analogue n'a pu être instituée pour vérifier cette même relation dans des gaz en mouvement plus ou moins rapide.

Il n'est donc pas établi, dans ce dernier cas, que l'équation (5') conserve sa forme. M. Bjerknes [1] a même étudié l'hypothèse où cette relation serait modifiée par des termes correspondant au mouvement, c'est-à-dire contenant les vitesses ou les accélérations.

Un raisonnement ayant pour but d'établir, au contraire, que la relation (5') subsiste dans tous les cas a été présenté par M. Duhem [2] : il consiste à ramener ce fait à une hypothèse relative à la forme de la quantité nommée *potentiel thermodynamique*. On nomme ainsi une grandeur $\mathfrak{F}$ permettant l'application du principe des vitesses virtuelles lorsqu'on tient compte des changements de température et de pression, de même que la fonction des forces permet d'écrire d'une manière simple ce même principe lorsqu'on reste dans le domaine de la Mécanique classique.

Ce potentiel thermodynamique se compose du potentiel des forces extérieures augmenté d'une partie complémentaire nommée *potentiel thermodynamique interne*.

M. Duhem admet que ce dernier a une expression de la forme

$$\int\int\int \rho\Phi \, dx \, dy \, dz$$

où Φ dépend de la densité et de la température : que ce potentiel est, par conséquent, fonction de la position du milieu, mais non des vitesses ou des accélérations de ses points.

---

(1) *Acta Mathematica*, tome IV, p. 121-170.

(2) *Cours de Physique mathématique, Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, tome I ; Paris, Hermann, 1891.

On obtient les équations d'équilibre du fluide en écrivant que la variation du potentiel thermodynamique total est nulle ou positive pour toute modification infiniment petite, compatible avec les liaisons.

En prenant, pour la modification en question, successivement chacune de celles qui ne font varier la densité en aucun point et qui n'interrompent pas la continuité, on démontre l'existence d'une fonction p, *continue en chaque point*, par l'introduction de laquelle les équations classiques de l'Hydrostatique sont vérifiées.

En introduisant une modification qui creuse une cavité, on obtient la condition $p > 0$.

En considérant, enfin, une modification qui fait varier la densité, on arrive à la relation

$$p = \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$$

et cette relation est bien de la forme (**5'**).

128. — Si maintenant, au lieu des équations de l'équilibre, on veut écrire celles du mouvement, le principe à appliquer, en vertu des lois générales de la Thermodynamique, est celui de Hamilton (le potentiel thermodynamique remplaçant la fonction des forces).

Or l'application de ce principe conduit au même résultat que celle du principe de d'Alembert, savoir aux équations (**1**), la formule (**5'**) subsistant dans le cas du mouvement comme dans celui de l'équilibre.

129. — L'équation (**5'**) étant ainsi admise en vertu de ce qui précède, l'équation (**7**) en résulte-t-elle forcément dans le cas de la compression ou de la détente adiabatique?

Une objection toute semblable à la précédente se pose à cet égard. Les raisonnements qui permettent de passer de l'une de ces relations à l'autre reposent, en effet, sur l'étude de la chaleur spécifique des gaz, à savoir sur la formule

$$(8) \qquad dQ = C \frac{\partial T}{\partial v} dv + c \frac{\partial T}{\partial p} dp$$

qui représente la quantité de chaleur dégagée dans une modification infiniment petite, en fonction de la variation dv du volume et de la variation dp de la pression. Or, les valeurs des chaleurs spécifiques C et c ont été établies, comme celles des coefficients de dilatation, par des expériences sensiblement statiques, c'est-à-dire où les mouvements de la masse gazeuse à étu-

dier étaient extrêmement peu rapides, ou par des expériences dans lesquelles les vitesses de ces mouvements étaients mal connues (expérience de Clément et Desormes). La même formule restera-t-elle valable dans le cas général de l'Hydrodynamique ?

La Thermodynamique permet de répondre à cette question. Il suffit, en effet, de partir de l'équation fondamentale qui exprime le principe de l'équivalence

$$d\mathfrak{T} - \frac{1}{2}\, d\Sigma m V^2 = E dQ + dU \tag{9}$$

où $d\mathfrak{T}$ représente le travail des forces extérieures appliquées au système, $\Sigma m V^2$ la force vive, E l'équivalent mécanique de la calorie, dQ la quantité de chaleur dégagée, U l'énergie interne, c'est-à-dire une certaine fonction de l'état interne du système.

Les forces extérieures appliquées à une masse gazeuse seront de deux sortes : 1° les forces appliquées aux éléments de masse, telles que pesanteur, électricité, etc. ; 2° les pressions extérieures, appliquées à la surface.

Le travail élémentaire de ces dernières sera

$$dt. \int\!\!\int p[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, dS, \tag{10}$$

dS étant l'élément de surface limite, n la normale à cet élément ; u, v, w, comme précédemment, les composantes de la vitesse. Le premier membre de l'équation (9) s'écrira donc en désignant par $d\mathfrak{T}_0$ le travail de la pesanteur et autres forces de la première catégorie

$$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{T}_0 - dt \int\!\!\int p[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, dS \\ - \frac{1}{2}\, d\Sigma m V^2 = E dQ + dU. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Dans les conditions où l'on s'est placé pour mesurer expérimentalement les chaleurs spécifiques des gaz, le travail $d\mathfrak{T}_0$ est négligeable. Il en est de même de la force vive, les vitesses étant insensibles. Comme l'intégrale double (10) représente, pour p constant, la quantité $p d\mathfrak{V}$, où $d\mathfrak{V}$ est la variation de volume, la formule précédente s'écrit

$$dQ = \frac{1}{E}(p d\mathfrak{V} - dU). \tag{12}$$

Il est clair que c'est cette formule qui fait connaître la chaleur dégagée dans un changement de volume ou de pression quelconque et que, par conséquent, son second membre coïncide avec la quantité (**8**).

Plaçons-nous maintenant dans le cas général et partons des équations (**1**) du mouvement. Multiplions respectivement ces équations par $u dt$, $v dt$, $w dt$ et ajoutons : multiplions encore par $\rho\, dx\, dy\, dz$ et intégrons dans le volume occupé par notre fluide. Au premier membre, nous obtiendrons le travail $d\mathcal{T}_0$.

Quant à la quantité

$$dt \int\int\int \rho \left(u \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + w \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

elle est (en vertu des relations $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$) la différentielle de la demi-force vive. Le dernier terme obtenu au second membre peut s'écrire

$$-dt\left\{\int\int p[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, dS + \int\int\int p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\right\}$$

en vertu du théorème de Green. La formule (**11**) devient donc finalement

$$\mathrm{E}dQ + dU = dt \int\int\int p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

La quantité

$$dt\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

représente, comme on sait, le changement de volume $d\mathcal{V}$ subi pendant l'instant dt par l'élément de masse $\rho dx\, dy\, dz$. Donc la quantité de chaleur dégagée par cet élément sera

$$dQ = \frac{1}{\mathrm{E}}(p d\mathcal{V} - dU),$$

dU étant l'énergie interne de cet élément.

Nous retombons donc, *même dans le cas du mouvement*, sur la formule (12). Celle-ci est bien, dès lors, indépendante des vitesses imprimées au fluide, ainsi que nous l'avions annoncé.

130. — On doit toutefois remarquer que notre raisonnement exclut la possibilité de variations brusques dans la vitesse, autrement dit de percussions s'exerçant dans l'intérieur de la masse. Cette supposition est en effet nécessaire pour écrire la relation

$$d\frac{1}{2}\Sigma m V^2 = dt \int\int\int \rho\left(u\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + v\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + w\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) dx\,dy\,dz$$

qui exprime la variation de la demi-force vive.

La relation en question est manifestement analogue au théorème des des forces vives et l'on sait que, dans la théorie des percussions, on est amené à remplacer le théorème des forces vives par une relation de forme différente, le théorème de Carnot.

Il est clair, d'ailleurs, que toutes les considérations précédentes sont relatives au cas où de telles percussions n'existent point. En particulier, lorsqu'elles se produisent, il n'est plus vrai, ainsi que nous aurons l'occasion de le remarquer plus loin, que la pression reste continue.

131. — Lorsque le fluide considéré ne sera ni un liquide incompressible ni un gaz parfait, la relation (5) continuera néanmoins à exister si l'on adopte l'hypothèse de M. Duhem ; mais elle aura une forme différente de (5). Elle achèvera de déterminer les équations internes du mouvement si l'on se donne en outre *a priori*, comme on doit toujours le faire, la manière dont varie la température. Dans le cas où celle-ci restera constante, la relation (5) prend évidemment la forme

$$(13) \qquad F(\rho, p) = 0.$$

Il en sera de même, ainsi qu'il résulterait de raisonnements tout semblables aux précédents, pour le cas de la détente ou compression adiabatique, si la vitesse reste continue.

Nous n'avons rien à dire de général sur la forme analytique des relations ainsi obtenues. Mais elles satisfont toutes à une condition d'inégalité commune : *La pression est une fonction croissante de la densité.* Autrement dit, en augmentant la pression subie par le fluide, on diminue son

volume. Cette condition exprime la *stabilité* de l'équilibre interne du milieu [1].

§ 2. — INTERVENTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

132. — Le mouvement d'un fluide quelconque est déterminé, d'une part par les équations internes telles que nous les avons écrites dans ce qui précède, d'autre part par les conditions initiales, enfin par les conditions aux limites.

Les conditions initiales consisteront à se donner, à un instant t_0 à partir duquel on étudie le mouvement, les positions des différentes particules et leurs vitesses.

Les conditions aux limites seront de deux sortes. Le fluide sera, sur tout ou partie de sa surface, en contact avec des parois solides dont nous supposerons le mouvement donné. Nous aurons donc à écrire qu'à chaque instant une partie de cette surface (laquelle est, ainsi qu'il a été dit au n° **18**, constamment formée par les mêmes molécules) coïncidera avec la paroi.

S'il existe une surface libre, nous supposerons donnée sur cette surface la valeur de la pression, c'est-à-dire de la quantité p qui figure dans les équations du mouvement.

133. — Lorsqu'on écrit, en Mécanique rationnelle, les équations différentielles du mouvement d'un système assujetti à des liaisons données quelconques, ces équations permettent en premier lieu de calculer les accélérations des différents points à un instant quelconque, lorsqu'on se donne à cet instant les positions de ces points et leurs vitesses à la seule condition, 1° que la position donnée du système satisfasse aux liaisons; 2° que les vitesses données des différents points soient de celles que ces points puissent recevoir, à l'instant en question, dans un mouvement compatible avec ces liaisons.

Occupons-nous donc de résoudre cette question dans le cas actuel, autrement dit de calculer les accélérations des différents points à l'instant t_0, connaissant à cet instant 1° les forces qui sollicitent le fluide, 2° les positions

(1) Duhem, *loc. cit.*, p. 80 83.— Voir plus loin, ch. VI, n° 272.

des points et leurs vitesses, 3° le mouvement de la paroi et la pression à la surface libre ainsi que ses dérivées par rapport au temps.

La question se présente de façon très différente, suivant qu'il s'agit d'un liquide ou d'un gaz.

1° Cas des liquides. — Employons le système de variables indépendantes indiqué au n° **61**^{bis} (ch. II) et composé, outre le temps t, de coordonnées initiales coïncidant avec les coordonnées actuelles à l'instant considéré.

Le fluide étant supposé incompressible, la relation (**13**) se réduit à

$$\rho = \text{constante}$$

et ne fait pas connaître la valeur de p. Quant à la relation (**4**), elle se réduit à

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les autres équations du mouvement, savoir les équations (**1**), font font connaître les sommes

$$\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\delta v}{\delta t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\delta w}{\delta t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Si l'on différencie la première de ces équations par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, qu'on ajoute membre à membre, on aura un résultat de la forme

$$\text{(15)} \qquad \frac{1}{\rho}\Delta p + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta v}{\delta t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta w}{\delta t}\right) = F$$

F étant une fonction connue de x, y, z à l'intérieur du volume liquide.

Mais l'équation (**14**) a lieu à tout instant (x, y, z étant les coordonnées actuelles à cet instant). On peut donc lui faire subir la différentiation $\frac{\partial}{\partial t}$ et écrire

$$\text{(16)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0.$$

Remplaçons $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ par leurs valeurs en fonction de $\frac{\delta u}{\delta t}$, $\frac{\delta v}{\delta t}$, $\frac{\delta w}{\delta t}$ tirées des relations (**2**) : nous aurons ainsi la valeur de $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$

$$\text{(16')} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta v}{\delta t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta w}{\delta t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned}\right.$$

et, en la reportant dans (**15**), il viendra

$$(17) \qquad \Delta p = F_2,$$

F_2 étant également connu en chaque point.

134. — D'autre part, les coordonnées des molécules qui sont en contact avec la paroi ne doivent pas cesser de vérifier l'équation de la surface de cette dernière. Cette équation

$$f(x, y, z, t) = 0$$

dépendra ou non du temps, mais nous la supposerons connue à tout instant. Si nous la différencions deux fois par rapport à t, il viendra

$$(18) \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 f = 0.$$

Dans cette relation, tout est connu sauf $\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 z}{\delta t^2}$. Les quantités $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ étant proportionnelles aux cosinus directeurs α, β, γ de la normale n à la paroi, on obtient ainsi la composante normale j_n de l'accélération en chaque point de celle-ci.

Si, enfin, on remplace $\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 z}{\delta t^2}$ par leurs valeurs tirées des équations (**1**), on voit que *l'équation précédente fait connaître, en chaque point de la paroi, la valeur de la dérivée normale* $\frac{dp}{dn}$.

Si le contact avec la paroi a lieu tout le long de la surface limite du fluide, la recherche de la quantité p en fonction de x, y, z est, par conséquent, ramenée au problème qui a fait l'objet du chapitre I. Le problème, comme on l'a vu, suppose une condition de possibilité, savoir

$$\int\int \frac{dp}{dn}\, dS = \int\int\int F_2\, dx\, dy\, dz.$$

Il est aisé d'interpréter cette condition. Elle s'obtient, en effet, en intégrant, dans tout le volume occupé par le fluide, l'équation (**16'**) ou, ce qui revient au même, l'équation (**16**), qui lui est équivalente moyennant les relations (**2**). Or cette dernière, dérivée par rapport au temps de (**14**), exprime que la dérivée seconde par rapport à t du volume élémentaire occupé par une portion infiniment petite de fluide est nulle. Après intégration, elle

exprimera que le volume total limité par la paroi donnée a sa dérivée seconde nulle : condition dont la nécessité était évidente *a priori* [1].

Cette condition étant supposée remplie, les considérations développées au chapitre I démontrent la possibilité du problème pour toutes les formes de récipient auxquelles la méthode de Neumann est applicable. Nous savons d'ailleurs que la solution est unique, à une constante arbitraire près qui peut être ajoutée à la valeur de p et qui n'a pas d'influence sur les valeurs des accélérations cherchées.

Ces accélérations sont donc déterminées.

135. On obtiendra de même les accélérations d'ordre supérieur (pourvu que les expressions des forces X, Y, Z soient données à tout instant) : il suffira de différentier par rapport au temps les équations (**1**), (**16**), (**18**) et de déterminer, à l'aide des équations ainsi différentiées, les dérivées successives de la pression, comme nous avons déterminé celle-ci par les équations primitives.

136. — Toutefois, le raisonnement précédent semble supposer que les accélérations cherchées sont distribuées d'une manière continue. On peut se demander (et les chapitres qui vont suivre montreront qu'un pareil doute est justifié) si l'on n'arriverait pas à une conclusion différente en abandonnant cette hypothèse.

Il est aisé de constater qu'il n'en est rien. Si, en effet, nous supposons les vitesses continues par rapport au temps, la pression p devra être continue. D'autre part, il en sera de même de la composante normale de l'accélération. Supposons, en effet, qu'une discontinuité se produise suivant une certaine surface. Ou bien cette discontinuité sera stationnaire, et, dans ce cas, les vitesses étant supposées continues, le fait en question résultera du n° **91** ; ou bien elle se propagera [2], et alors, sinon à l'instant considéré lui-même, du moins aux instants infiniment voisins, il y aura compatibilité. S'il en est ainsi, la densité ne variant pas, la composante normale de la discontinuité sera nulle, et, par conséquent, la composante normale de l'accélération continue.

Or, dans la valeur précédemment trouvée de l'accélération, les seuls éléments inconnus sont les dérivées de la pression. Si donc la composante

---

(1) Il est aisé de voir que, sous l'une ou l'autre de ses formes, la condition de possibilité fait connaître, en fonction des positions et des vitesses, l'intégrale $\iint j_n \, dS$ étendue à la surface de la paroi.

(2) En réalité, dans le cas des liquides, aucune discontinuité ne peut se propager.

139. 2° Cas des gaz. — Si maintenant nous passons au cas des fluides compressibles, la relation (13) sera résolue par rapport à p. Comme la valeur de la densité en chaque point est une des données du problème, puisqu'on connaît les positions des diverses molécules à l'instant donné en fonction de leurs positions initiales, on voit que, contrairement à ce qui se passait dans le cas précédent, *p est directement connu en tous les points.*

Dès lors, les équations du mouvement font connaître toutes les accélérations.

Mais aux points situés sur la surface limite, ces accélérations doivent vérifier la condition (18). Il faudrait donc que la valeur (donnée en tous les points) de $\frac{dp}{dn}$ fût précisément celle qui vérifie cette relation, les composantes de l'accélération étant calculées comme il vient d'être expliqué.

Or il n'y a aucune espèce de raison pour qu'il en soit ainsi. Lors même que cette concordance se serait présentée dans les instants qui précèdent celui que nous considérons, elle pourrait disparaître dans les instants suivants par un changement apporté à l'accélération normale de la paroi.

Il y a donc contradiction.

140. — Cette contradiction se retrouve d'ailleurs dans le calcul des accélérations d'ordre supérieur. Il est clair qu'en différentiant les équations (1) par rapport au temps, comme il a été indiqué pour les liquides, on connaîtra les accélérations en question en tout point du fluide et qu'il semblera *a priori* n'y avoir aucune raison pour qu'à la surface ces accélérations coïncident avec celles de la paroi.

Nous pourrions d'ailleurs aller encore plus loin si nous raisonnions par analogie avec ce qui se passe dans la Mécanique classique. Dans les problèmes que pose celle-ci, du moment qu'on peut, à tout instant, calculer les accélérations en fonction de la position et des vitesses du système, il en résulte que le mouvement de celui-ci entièrement déterminé dès qu'on donne cette position et ces vitesses à un instant donné. Or nous venons de voir qu'on peut ici, sans tenir compte du mouvement de la paroi, calculer les accélérations de toutes les molécules en fonction de leurs positions et de leurs vitesses. Donc tout le mouvement ultérieur devrait être également déterminé indépendamment du mouvement de la paroi.

Plus généralement, le mouvement d'une portion quelconque du fluide serait déterminé sans qu'on ait à tenir compte du mouvement des régions voisines, ce qui est évidemment absurde.

Nous allons, dans les chapitres qui vont suivre, apprendre à lever cette contradiction apparente.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT RECTILIGNE DES GAZ

§ 1. — CAS DE LA VITESSE DE PROPAGATION CONSTANTE

141. — Pour élucider la difficulté qui a fait l'objet du chapitre précédent, nous allons d'abord nous placer dans un cas particulièrement simple et où les équations du problème peuvent être intégrées : celui du *mouvement rectiligne* ou *mouvement par tranches*.

C'est l'étude de ce mouvement qui fait l'objet de l'important Mémoire de Riemann ([1]) auquel nous avons fait allusion au n° **69**. C'est à elle également que sont consacrés deux des Mémoires publiés en 1887 par Hugoniot ([2]), lequel retrouva sans les connaître, une grande partie des résultats de Riemann.

On suppose que le récipient dans lequel est renfermé le gaz a la forme d'un cylindre droit dont la surface latérale est fixe, les bases seules étant formées par des pistons mobiles. De plus, à un instant quelconque il est supposé que, dans toute section parallèle aux bases, la densité est à un instant quelconque, constante, ainsi que la vitesse, laquelle est parallèle aux génératrices. Dans ces conditions, l'état d'un point quelconque du milieu et sa vitesse ne dépendront que de l'abscisse de ce point, comptée parallèlement aux génératrices. Le problème se réduira à exprimer, en fonction de l'abscisse primitive a et du temps t, l'abscisse actuelle x,

---

([1]) *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (Mémoires de l'Ac. des Sc. de Göttingue, tome VIII ; 1860). La traduction française, due à M. Stouff, occupe les pages 177-203 de l'édition des Œuvres de Riemann traduites par M. L. Laugel (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

([2]) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, tome XXXIII ; 1887.

ainsi que la densité ρ et la pression p. Au lieu de ρ, il nous sera commode ici d'introduire la quantité inverse $\frac{\rho_0}{\rho} = \omega$ ou *dilatation*, laquelle aura pour expression

$$(1) \qquad \omega = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial a}.$$

ω est partout inversement proportionnel à ρ, si la densité ρ_0 de l'état initial est constante. Nous supposerons toujours, sauf indication contraire, l'état initial choisi de façon qu'il en soit ainsi.

D'après les conclusions auxquelles nous sommes parvenus au chapitre précédent, la pression sera une fonction de ω : Si on adopte la loi de Mariotte, c'est-à-dire si on suppose la température constante, on aura

$$(2) \qquad p = K\rho = \frac{k}{\omega} \qquad (k = K\rho_0);$$

si au contraire, comme il y a lieu de le faire, on choisit la loi adiabatique de Poisson, on écrira

$$(2') \qquad p = K\rho^m = k\omega^{-m} \qquad (k = K\rho_0{}^m)$$

dans laquelle, comme nous l'avons vu (n° **126**), k est une fonction de l'abscisse initiale a, mais se réduit à une constante si, à un instant quelconque du mouvement, le fluide a été à une pression et à une température uniformes dans toute la masse.

On remarquera que la formule (**2**) peut-être considérée comme un cas particulier de (**2'**) : elle se déduit de celle-ci en faisant $m = 1$.

Nous n'allons pas quant à présent, préciser la forme de la relation qui existe entre la pression et la densité, et nous l'écrirons sous la forme générale du (n° **131**), soit ici

$$(3) \qquad p = \varphi(\omega)$$

où la fonction $\varphi(\omega)$ peut dépendre de a.

142. — Toutefois, nous devons nous rappeler que la fonction φ ne peut pas, même *à priori*, être absolument quelconque. Nous savons, en effet (n° **131**), qu'en augmentant la pression, la densité doit augmenter et le volume spécifique diminuer : on doit donc avoir, en tout cas,

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{d\omega} < 0.$$

143. — Nous prendrons les variables de Lagrange, soit ici a et t. Il sera d'ailleurs inutile, cette fois, d'employer la notation δ pour désigner les dérivées prises dans cette hypothèse, aucune confusion n'étant à craindre.

Les équations (1) du chapitre précédent (n° **124**) se réduiront à la première d'entre elles : dans celle-ci, la quantité $\frac{\partial p}{\partial x}$ devra être remplacée par

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial a}}{\frac{\partial x}{\partial a}} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial p}{\partial a}.$$

L'équation devient alors

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial a} = \mathrm{X} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Dans le cas général, p pourra être une fonction de $\omega = \frac{\partial x}{\partial a}$ et de a. Si, par exemple, la loi de détente est celle de Poisson, la quantité k qui figure dans la formule (2') pourra être une fonction de a. L'équation (5) s'écrira alors

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{dk}{da}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{-m} - mk\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{-m-1}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right] = \mathrm{X} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Nous nous attacherons toutefois principalement au cas où la relation (3) est la même pour toutes les valeurs de a et où, en même temps, il n'y a pas de forces extérieures agissantes, de sorte que X est nul dans l'équation (5). Posant alors

$$(7) \qquad -\frac{1}{\rho_0}\varphi'(\omega) = \psi(\omega),$$

cette équation deviendra

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \psi(\omega)\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \psi\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$$

équation aux dérivées partielles du deuxième ordre qui détermine l'inconnue x comme fonction des variables indépendantes a, t.

144. — Nous allons, pour commencer, simplifier encore la question en remplaçant la fonction (positive d'après l'inégalité (4)) $\psi(\omega)$, par une constante θ^2. C'est à quoi l'on est conduit lorsqu'on étudie les *petits mouvements* du fluide. Si, en effet, on suppose infiniment petits les écarts des molécules par rapport à leurs positions initiales et leurs vitesses, $\psi(\omega)$ différera très peu de la valeur $\psi(1)$ qu'il prend dans l'état initial.

L'hypothèse $\psi(\omega) = \theta^2 =$ constante s'appliquerait d'ailleurs aux mouvements d'amplitude finie si l'on prenait pour la fonction φ l'expression

$$(8') \qquad \varphi(\omega) = C - \rho_0 \theta^2 \omega$$

C étant une constante.

Mais il est clair qu'une telle expression pour la pression ne serait pas admissible, du moins pour un gaz, puisqu'elle deviendrait négative pour ω suffisamment grand.

Une loi de cette espèce pourrait tout au plus convenir théoriquement à un liquide légèrement compressible. Dans un tel fluide, en effet, p varierait entre des limites très étendues pour de très faibles variations de ω et s'annulerait pour une certaine valeur finie de cette quantité. Mais dans la réalité, bien entendu, le phénomène serait limité, pour une certaine valeur positive et non nulle de p, par la vaporisation du liquide.

145. — Moyennant la simplification précédente, l'équation (8) s'écrit

$$(8') \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \theta^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}.$$

Cette équation est celle des cordes vibrantes ; son intégrale générale est bien connue : elle s'écrit

$$(9) \qquad x = \frac{1}{2}\left[f_1(a + \theta t) + f_2(a - \theta t)\right].$$

Toute la question se réduit donc à choisir les fonctions f_1 et f_2 de manière à satisfaire : 1° aux conditions initiales ; 2° aux conditions aux limites.

Prenons pour origine des coordonnées l'une des extrémités du tuyau ; et soit l la longueur de celui-ci. a variera donc entre 0 et l.

Pour $t = 0$ nous supposons données les valeurs de x et celles de $\frac{\partial x}{\partial t}$, soit x_0 et $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0$: on aura donc pour $0 < a < l$

$$(10) \qquad \begin{cases} f_1(a) + f_2(a) = 2x_0 \\ \theta\left[f'_1(a) - f'_2(a)\right] = 2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0. \end{cases}$$

La seconde de ces deux équations s'intègre immédiatement et donne

$$(11) \qquad \theta\left[f_1(a) - f_2(a)\right] = F(a) - F(o) + \text{constante},$$

$F(a)$ étant la primitive de $2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0$. Quant à la constante, on peut la sup-

poser nulle : car la valeur (**9**) de x ne change pas si on ajoute une constante à la fonction f_1, en retranchant cette même constante de la fonction f_2. Or cette opération ajoute au premier membre de l'équation (**10**) une constante arbitraire.

Les équations (**10**), (**11**) nous font connaître les fonctions f_1 et f_2 pour toutes les valeurs de l'argument comprises entre 0 et l.

146. — Faisons maintenant intervenir les conditions aux limites. Nous supposons connues à chaque instant les positions des pistons qui ferment le tuyau à ses deux extrémités. Nous aurons donc pour chaque valeur positive de t les valeurs de x correspondant à $a = 0$ et à $a = l$.
Il est aisé [1] de montrer directement que ces conditions achèvent de déterminer les fonctions inconnues. Il nous sera commode, ici, d'employer une représentation géométrique.

Nous considérerons a, t et x comme des coordonnées dans l'espace, le plan des $a\,t$ étant pris comme plan horizontal de projection. La solution cherchée sera alors représentée par une portion de surface. a étant par définition compris entre 0 et l, et t positif, cette portion de surface sera forcément limitée à trois plans : l'un T, qui est le plan des $a\,x$, le second O qui est le plan des tx, le troisième L qui est le plan $a = l$.

Dans la figure 10, nous employons comme plans de projection, outre le plan horizontal, les plans auxiliaires T, O, L.

On peut poser

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

où x_1 représente la fonction $f_1\,(a + \theta t)$ et x_2, la fonction $f_2\,(a - \theta t)$. Les équations

$$x_1 = f_1\,(a + \theta t),$$
$$x_2 = f_2\,(a - \theta t)$$

représenteront deux cylindres K_1 et K_2, dont l'un aura ses génératrices parallèles à la droite d_1 représentée par les équations

(**12**) $$x = 0 \quad , \quad a + \theta t = l;$$

l'autre à la droite d_2 représentée par les équations

(**12'**) $$x = 0 \quad , \quad a - \theta t = 0;$$

[1] Voir, par exemple, Jordan, *Cours d'Analyse*, tome III.

et la valeur cherchée de x sera la moyenne entre les ordonnées de ces d
cylindres.

D'après les équations (10) et (11), nous connaissons les courbes γ (*fig.* 10), suivant lesquelles nos deux cylindres coupent le plan T.

Nous connaîtrons donc une portion du cylindre K_1, celle qui est proj horizontalement suivant le triangle formé par l'axe des a, celui des t droite d_1. De même nous connaîtrons une portion du cylindre K_2 proj suivant le triangle limité par l'axe des t, la trace de L et la droite d

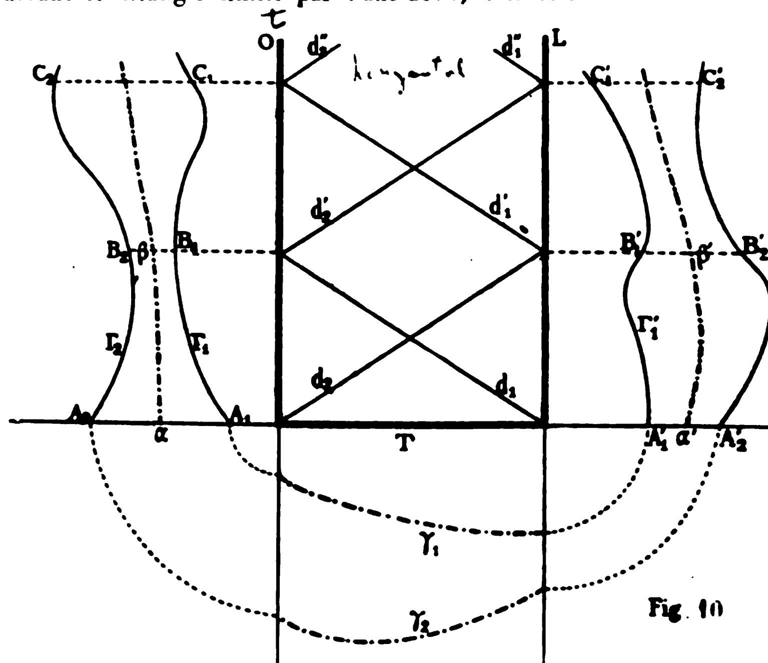


Fig. 10

nous appelons Γ_1 et Γ_2 les sections de nos cylindres par le plan O; Γ'_1 e les sections de nos cylindres par le plan L, nous aurons ainsi immé tement une portion A_1B_1 de la courbe Γ_1 et une portion $A'_2B'_2$ d courbe Γ'_2.

117. — Cela posé, l'effet des conditions aux limites est de nous faire naître les sections $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ (*fig.* 10) de la surface cherchée par les pla et L. Nous pourrons donc de l'arc A_1B_1, une fois obtenu, déduire l correspondant A_2B_2 de Γ_2 pendant que la même construction nous don l'arc $A'_1B'_1$ de Γ'_1 qui correspond à $A'_2B'_2$.

Nous aurons ainsi deux nouvelles nappes de nos cylindres. Du prem

149. — Lorsque cette égalité n'a pas lieu, la courbure du cylindre K_2 étant discontinue tout le long de la génératrice projetée suivant d_2, il en est de même des dérivées $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$.

Si, par conséquent, nous considérons une valeur de t positive, mais petite, ce qui revient à couper la figure par un plan parallèle à celui des ax, nous voyons que la dérivée $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$ de la dilatation, continue en général du moins pour les points voisins de l'extrémité 0 du cylindre), éprouvera une discontinuité au point dont la projection est sur la droite d_2. A mesure que t augmentera, les particules entre lesquelles se produira cette discontinuité iront en s'éloignant de l'extrémité.

De même, si nous considérons une molécule déterminée, voisine de l'extrémité, ce qui revient à couper la figure par un plan perpendiculaire à l'axe des a, nous constaterons que l'accélération de cette molécule éprouvera une discontinuité à un instant très voisin de l'instant initial si la molécule en question est très près de l'extrémité, la valeur t qui correspond à la discontinuité allant en augmentant à mesure que l'on considère des points plus éloignés du piston.

En un mot, nous reconnaissons là une *onde du second ordre* telle que nous l'avons étudiée au chapitre II. Cette onde se propage dans le sens positif avec une vitesse qui (rapportée à l'état initial tel que nous l'avons choisi), n'est autre que θ, puisque l'équation de la droite d_2 est $a = \theta t$.

Grâce à la présence de cette discontinuité, la contradiction relevée au chapitre précédent disparaît. Pour $\theta t - a$ très petit et négatif, les deux quantités $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ et $\theta^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$ ont une même valeur, celle qui est déduite de l'état initial à l'extrémité $a = 0$. Si $\theta t - a$ est très petit et positif, elles ont encore une même valeur, l'accélération initiale du piston.

150. — Si un phénomène analogue se passait à l'extrémité opposée du cylindre, il donnerait lieu à une discontinuité affectant évidemment le cylindre K_1 et non plus le cylindre K_2. Celle-ci se produirait en tous les points de la génératrice projetée suivant d_1. Elle se propagerait donc encore avec la vitesse θ, mais dans le sens négatif cette fois.

151. — En particulier, ceci aura lieu (sauf dans des cas exceptionnels), lorsque l'onde née, en l'instant initial, à l'extrémité $a = 0$, et dont la propagation est représentée par la droite d_2, atteindra l'extrémité $a = l$. Le cylindre K_1 ayant, en effet, sa courbure discontinue suivant la génératrice

correspondant à cette onde, il en sera de même de la courbe Γ'_2. Si la courbure de la ligne $\alpha'\beta'\gamma'$ ... n'offre pas, précédemment au même point, une variation de grandeur convenable, la ligne Γ_1 et par conséquent, le cylindre K_2 auront leurs courbures discontinues.

En un mot, l'onde primitive née à l'extrémité $a = 0$, et qui se propageait avec la vitesse θ, se *réfléchira* sur le piston $a = l$, c'est-à-dire qu'elle engendrera, lors de sa rencontre avec celui-ci, une onde analogue se propageant avec la vitesse $-\theta$.

152. — Si les deux quantités $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ et $\theta^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$ sont égales entre elles pour l'extrémité 0 à l'origine des temps, la courbure du cylindre K_2 sera continue. Mais la singularité étudiée au chapitre précédent pourra se produire pour les dérivées du troisième ordre de x. L'équation (8') donne, effectivement,

(13)
$$\theta^2 \frac{\partial x^3}{\partial a^2 \partial t} = \frac{\partial^3 x}{\partial t^3}$$

égalité dont le premier membre nous est fourni par l'état initial du gaz, et le second par le mouvement du piston. Lorsque cette égalité n'aura point lieu, il se produira une discontinuité du troisième ordre qui affectera successivement les différents points de la figure 10 projetés suivant d_2 et qui, par conséquent, se propagera encore avec la vitesse θ.

Comme précédemment, de telles discontinuités du troisième ordre pourront être de deux espèces, se propageant avec la même vitesse θ, mais dans des sens différents ; les unes naîtront à l'extrémité $a = 0$ du tuyau, les autres à l'extrémité $a = l$.

Si l'équation (13) était, à son tour, vérifiée, il pourrait cependant naître une discontinuité du quatrième ordre ; et ainsi de suite.

153. — On voit même clairement ici comment pourrait se produire une discontinuité d'ordre infini. C'est ce qui arriverait si, la première nappe du cylindre K_2 (celle qui est fournie par l'état initial) étant analytique, la seconde nappe n'était point le prolongement analytique de la première, mais avait avec elle un contact d'ordre infini.

154. — On pourrait enfin se placer au point de vue adopté au n° **140**, en considérant successivement deux mouvements M_1, M_2 qui coïncident jusqu'à l'instant initial, mais pour lesquels les mouvements du piston $a = 0$ soient différents à partir de cet instant. Le cylindre K_2 serait alors

modifié à partir de la génératrice projetée suivant d_2, ligne qui marquerait la loi suivant laquelle se propagerait la modification.

Lors même que le mouvement du piston $a = l$ resterait inaltéré, le cylindre K_1 changerait (par suite du changement de la courbe Γ'_2) à partir du moment où cette propagation atteindrait l'extrémité du tube : là encore, il y aurait *réflexion*.

133. — Revenons au cas d'une discontinuité née à l'instant initial et à l'extrémité $a = 0$.

En un point projeté sur d_2, mais dans une région où la courbure du cylindre K_1 est continue ainsi que ses dérivées, il y aura *compatibilité* : la discontinuité restera unique non seulement à l'instant qui correspond à ce point, mais aux instants précédents et suivants.

Il en sera de même pour un point projeté sur d_1 seul, si du moins, à l'origine des temps, une discontinuité s'est produite pour $a = l$.

Considérons, au contraire le point de rencontre des droites d_1, d_2. Ce point correspond à une valeur t_1 de t pour laquelle existe une discontinuité unique. Seulement cette discontinuité affecte à la fois les deux cylindres K_1 et K_2. *Il n'y a point compatibilité* : toute valeur de t différente de t_1 correspondra à une perpendiculaire à l'axe des t qui coupera d_1 et d_2 en deux points distincts. On voit bien ici, conformément à nos considérations générales du n° **105**, qu'une discontinuité sans compatibilité n'est autre chose que la superposition, à un instant isolé, de deux discontinuités qui se rencontrent.

Dans le problème actuel, la condition de compatibilité se présente sous une forme particulière et très simple : elle est évidemment qu'une seule des deux fonctions f_1 et f_2, ait ses dérivées discontinues. Par exemple, si θ, est positif, il faudra que la dérivée seconde de la fonction f_1 n'éprouve aucune variation. Or, on a

$$(14)\qquad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right] = [f_1''] + [f_2'']$$

$$(14)\qquad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right] = \theta\{[f_1''] - [f_2'']\}.$$

En éliminant $[f_2'']$ qui, lui, est en général différent de zéro, il vient

$$(15)\qquad 2[f_1''] = 0 = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right] + \frac{1}{\theta}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right].$$

On aurait une troisième condition analogue à (**14**), (**14'**) en envisageant l'accélération. Mais, dans le problème actuel, celle-ci n'est pas une quantité distincte : elle doit être considérée comme déterminée par l'équation (**8**), à l'aide des autres dérivées du second ordre. La condition que l'on obtient en l'introduisant n'est évidemment autre que (**14**).

Si la discontinuité était d'ordre quelconque n, on n'aurait de même à considérer que les dérivées d'indice *zéro* ou *un*, toutes les autres se calculant en fonction des premières par le moyen de l'équation aux dérivées partielles. La condition de compatibilité correspondante sera donc

$$(16) \qquad \left[\frac{\partial^n x}{\partial a^n}\right] + \frac{1}{\theta}\left[\frac{\partial^n x}{\partial a^{n-1}\partial t}\right] = 0.$$

156. — Mais on n'aura pas seulement une seule condition de cette espèce, celle qui correspond à l'ordre même de la discontinuité. Quel que soit cet ordre n_0, on devra en outre écrire toutes les conditions (**16**), en nombre infini, correspondant aux différentes valeurs de n supérieures à n_0, et qui seront les *conditions de compatibilité d'ordre supérieur*, dont nous avons obtenu la partie cinématique aux n^{os} **119-123**.

Par exemple, pour une discontinuité du second ordre se propageant dans le sens positif, on devra avoir les conditions (**15**) mais aussi les conditions qui expriment que la fonction f_1 a sa dérivée troisième, quatrième, etc., continues.

Si, à un instant quelconque t_1, ces conditions n'étaient pas vérifiées, la discontinuité du second ordre marchant dans le sens positif se doublerait d'une discontinuité du troisième, du quatrième, ... ordre qui se séparerait de la première aux instants voisins de t_1 et se propagerait dans le sens négatif.

Ici, comme on le voit, ces conditions de compatibilité des différents ordres sont indépendantes les unes des autres.

157. — La considération des deux fonctions f_1 et f_2 permettra d'exprimer la compatibilité, dans le problème actuel, même pour une discontinuité d'ordre infini (n° **76**).

Supposons en effet, que, dans une partie du tube, x et $\frac{\partial x}{\partial t}$ soient, à l'instant initial, des fonctions analytiques de a pour $a < a_1$; et que, pour $a > a_1$, ces mêmes fonctions cessent d'être le prolongement analytique des premières, leurs dérivées de tous ordres par rapport à a étant cependant continues pour $a = a_1$. La condition pour que, dans cette dis-

continuité d'ordre infini, il y ait compatibilité avec propagation dans le sens positif est que la fonction f_1 soit analytique et régulière. Or, cette fonction peut se calculer à l'aide des données précédentes par l'intermédiaire des équations (**10**) et (**11**).

Si, en même temps que le mouvement M_1, on en considérait un autre M_2 qui, à l'instant initial, coïnciderait avec M_1 dans une région R du tube et en serait distinct dans une autre région R' contigüe à la première, les deux mouvements M_1 et M_2 seraient identiques, à un instant quelconque t, dans une certaine région R_t et distincts dans une autre région R'_t. Le point de séparation de ces deux régions irait en se déplaçant, avec la vitesse θ, en général vers la région R. On peut dire encore qu'il y aurait compatibilité si, au contraire, le déplacement de ce point avait lieu vers la région R'. Il faudrait pour cela que l'une des deux fonctions f_1 et f_2, calculées comme nous venons de le dire, fût la même pour M_1 et pour M_2.

158. — L'étude de la propagation des discontinuités, telle que nous venons de la rencontrer, est en rapport direct avec la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont nous allons rappeler sommairement les principes, en renvoyant pour les détails aux traités bien connus de M. Darboux et de M. Goursat [1]. Nous retrouverons d'ailleurs cette théorie sous une forme plus générale dans les chapitres suivants (chap. VII).

Soit l'équation de *Monge-Ampère*, c'est-à-dire l'équation

$$(17)\qquad A(rt - s^2) + Br + 2Cs + B't + D = 0$$

dans laquelle r, s et t désignent les dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z de x et de y; pendant que A, B, B', C, D sont des fonctions données de x, y, z, ainsi que des dérivées partielles du premier ordre p et q. Si x, y, z sont considérées comme les coordonnées d'un point de l'espace, toute fonction z de x et de y satisfaisant à cette équation représentera une surface intégrale.

Une telle surface est, en général, déterminée par les *conditions de Cauchy*, lesquelles consistent à se donner, en tous les points d'une courbe γ

(1) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, tome III, p. 263 et suiv. — Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome I.

du plan des $x\,y$, les valeurs de z et de ses dérivées premières p, q. Celles-ci devront évidemment être telles que la relation

$$dz = pdx + qdy \tag{18}$$

soit vérifiée pour un déplacement effectué suivant γ.

Géométriquement, cela revient à se donner une courbe gauche Γ (projetée suivant γ) par laquelle doit passer la surface cherchée, ainsi que le plan tangent à cette surface en chaque point de la courbe.

Pour résoudre le *problème de Cauchy*, c'est-à-dire pour déterminer la solution d'après ces données, on cherche d'abord les valeurs de r, s et t en chaque point de γ : ces quantités doivent évidemment vérifier les conditions

$$\left\{ \begin{aligned} dp &= rdx + sdy, \\ dq &= sdx + tdy \end{aligned} \right. \tag{19}$$

(les différentielles correspondant toujours à un déplacement effectué suivant γ) et, d'autre part, l'équation (**17**). Cette dernière est du second degré, du moins si $A \neq 0$. Cependant, si l'on tire des équations (**19**) les valeurs de deux des quantités r, s et t en fonction de la troisième, le premier membre de (**17**) deviendra, par rapport à celle-ci, du premier degré.

(Cela tient à ce que, si l'on considère, non plus x, y et z, mais r, s et t comme des coordonnées cartésiennes, la droite représentée par les équations (**19**) est parallèle à une génératrice du cône asymptote de la quadrique qui correspond à (**17**)).

On trouve, en prenant s comme inconnue :

$$\left\{ \begin{aligned} & s\left[A(dp\,dx + dq\,dy) + Bdy^2 - 2Cdx\,dy + B'dx^2\right] \\ & \qquad = Adp\,dq + Bdp\,dy + B'dq\,dx + Ddx\,dy. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Dans les équations que nous aurons à étudier, le coefficient A est d'ailleurs nul et le caractère linéaire des équations (**17**), (**19**) apparait à première vue.

Un calcul tout semblable fera connaitre les dérivées du troisième ordre $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ et d'une manière générale les dérivées de tous ordres de la fonction cherchée en chaque point de Γ.

Si donc on sait que cette fonction est holomorphe, elle est parfaitement déterminée, puisqu'on a tous les coefficients de son développement.

Inversement, d'ailleurs, lorsque les données sont analytiques et régulières, on démontre, à l'aide du théorème de Mme Kowalewsky [1], que la

[1] Comparer ch. VII, n° 281.

solution ainsi déterminée existe : il résulte de ce qui précède qu'elle unique.

159. — Mais il en est autrement si l'équation du premier degré (est impossible ou indéterminée, ce qui arrive pour

(21) $$A(dp\,dx + dq\,dy) + Bdy^2 - 2Cdx\,dy + B'dx^2 = 0.$$

Si cette condition est seule vérifiée, le problème qui consiste à cl cher r, s et t est en général, impossible. Écartant cette hypothèse laquelle nous aurons à revenir plus loin, nous admettrons que les éq tions (17) et (19) sont compatibles. La condition pour cela est que ait, outre l'équation (21), la suivante

(22) $$Adp\,dq + Bdp\,dy + B'dq\,dx + Ddx\,dy = 0.$$

Si A est nul, l'équation (21) se réduit à

(21') $$Bdy^2 - 2Cdx\,dy + B'dx^2 = 0.$$

Elle définit, pour chaque système de valeurs de x, y, z, p, q, deux leurs λ_1 et λ_2 du coefficient angulaire $\lambda = \frac{dy}{dx}$ de la tangente à γ.

Si l'on a, par exemple $\frac{dy}{dx} = \lambda_1$, la relation (22) devient

(22') $$\lambda_1(Bdp + Ddx) + B'dq = 0.$$

Lorsque les conditions (21) et (22) sont vérifiées, nos équations ne dé minent plus r, s et t, et il semble que l'une de ces trois quantités pu être choisie d'une façon entièrement arbitraire en chaque point de γ.

Ce n'est point toutefois ce qui a lieu : Si, en effet, on considère les d vées suivantes $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, on voit que les équations qui doivent fournir ont également pour déterminant le premier membre de (21) ce est évident pour $A = 0$, les coefficients de ces équations étant alors mêmes que ceux des équations (17), (19) : il y aura donc une condit de possibilité, laquelle consiste en une équation différentielle linéaire premier ordre à laquelle doivent satisfaire r, s et t. Le choix de ces d nières ne comporte donc qu'une *constante* arbitraire. Quant aux dériv du troisième ordre, une fois vérifiée l'équation différentielle dont n venons de parler, *elles deviendront à leur tour indéterminées* ou plu comme le montre la considération des dérivées quatrièmes, elles dép dront d'une nouvelle constante arbitraire.

Dans cette transformation, les nouvelles valeurs des dérivées secondes sont

$$r_1 = \frac{t}{rt - s^2}, \quad s_1 = -\frac{s}{rt - s^2}, \quad t_1 = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Appliquée à l'équation (17), cette transformation donne une équation analogue dans laquelle A, B, B', C, D sont changés en D, B', B, C, A.

D'ailleurs, deux surfaces tangentes quelconques sont changées en deux surfaces tangentes. Donc les caractéristiques de la nouvelle équation correspondent à celles de la primitive.

Ce que nous venons de dire pour la transformation de Legendre peut d'ailleurs se répéter pour toutes les transformations de contact : celles-ci changent une équation quelconque de la forme (17) en une équation de même forme et les caractéristiques en caractéristiques.

163. — On doit toutefois se rappeler qu'à une intégrale de l'une des équations ne correspond pas toujours une intégrale proprement dite de l'autre, parce qu'à une surface, la transformation considérée peut faire correspondre une courbe (ou même un point unique). C'est ainsi que, dans la transformation de Legendre (qui équivaut, comme on sait, à une transformation par polaires réciproques) toute surface développable est changée en une courbe. Lie [1] a indiqué une définition générale de l'intégrale d'une équation telle que (17), d'après laquelle une telle courbe peut être considérée comme une intégrale de cette équation, au même titre qu'une surface. Sans reprendre les considérations d'où on tire cette définition, on peut dire qu'une courbe est une *intégrale dégénérée* de l'équation (17), si la surface développable en laquelle elle est changée par la transformation de Legendre est une intégrale de l'équation transformée.

164. — Enfin, si A étant nul, les coefficients B, B', C sont fonctions de x, y seuls, l'équation (21') pourra être considérée comme une équation différentielle ordinaire entre ces deux quantités. Si le discriminant $BB' - C^2$ est différent de 0, cette équation aura deux séries de courbes intégrales distinctes que nous pourrons désigner par $X =$ const., $Y =$ const. En prenant comme nouvelles variables indépendantes X et Y, on fera disparaître r et t de l'équation.

---

(1) Voir Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome I, pages 49-51

165. — L'application de ces résultats à la théorie de la propagation du mouvement est immédiate.

Si, en effet, deux mouvements de notre masse fluide sont en discontinuité du second ordre, ils correspondront, dans le mode de représentation géométrique qui vient de nous servir, à deux surfaces intégrales tangentes entre elles tout le long d'une ligne, puisque, en tout point où il y a discontinuité, les dérivées premières ne changent pas de valeur. Une telle ligne est nécessairement, d'après les résultats précédents, une caractéristique.

Si la discontinuité était d'un ordre supérieur au second, cette conclusion ne serait pas modifiée. Nous avons vu, en effet, que si les dérivées premières et secondes de l'intégrale cherchée sont données le long de la courbe Γ, les dérivées troisièmes auront des valeurs parfaitement déterminées (de sorte qu'il ne pourra pas se produire de discontinuité du troisième ordre) si la courbe Γ n'est pas une caractéristique, au lieu qu'elles pourront changer dans le cas contraire.

Les mouvements compatibles seront évidemment ceux dont les surfaces représentatives se raccorderont ainsi suivant une ligne Γ.

Pour l'équation (8'), les coefficients sont respectivement 1, 0 et θ^2. La caractéristique correspondra donc à $\frac{da}{dt} = \pm \theta$. Cette quantité $\pm \theta$ représente évidemment la vitesse de propagation, les deux familles de caractéristiques correspondant aux deux sens dans lesquelles cette propagation peut s'effectuer.

§ 2. — CAS GÉNÉRAL

166. — Occupons nous maintenant d'étudier la propagation de ces discontinuités sur l'équation du mouvement telle que nous l'avons primitivement obtenue, et non sur l'équation (8') que nous lui avons arbitrairement substituée.

Cette étude n'offre d'ailleurs aucune difficulté, soit qu'on emploie les considérations développées au chapitre II, soit qu'on ait directement recours à la théorie des caractéristiques.

Partons, à cet effet, de l'équation du mouvement sous sa forme la plus générale (5) telle que nous l'avons obtenue au n° **143**, savoir

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) = X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \qquad (p = \varphi(\omega, a))$$

Supposons que, pour une valeur déterminée de a et un instant déterminé t, le mouvement présente une discontinuité du second ordre. Supposons d'ailleurs qu'il y ait compatibilité et soit θ la vitesse de propagation. En désignant respectivement par les indices 1 et 2, ce qui se rapporte aux deux régions séparées par la discontinuité, on devra avoir

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}\right)_1 = -\theta\left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)_2 - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)_1\right] \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_2 - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_1 = \theta^2\left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)_2 - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)_1\right]. \end{cases}$$

Mais les quantités $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)_1$, $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_1$; $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)_2$, $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_2$ doivent satisfaire séparément à l'équation (5) dans laquelle les dérivées premières ont les mêmes valeurs de part et d'autre. En retranchant membre à membre les deux relations ainsi écrites, il vient.

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right] = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \varpi}{\partial \omega}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right]$$

ou

$$(24)\qquad \theta^2 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \varpi}{\partial \omega}$$

ou

$$(24')\qquad \theta^2 = \psi(\omega)$$

$\psi(\omega)$ étant la quantité définie par la formule (7).

Nous avons ainsi la valeur de la vitesse de propagation θ. La théorie des caractéristiques nous aurait conduit au même résultat, θ n'étant autre que le coefficient angulaire $\frac{da}{dt}$ de la tangente à la caractéristique, lequel est fourni par l'équation (21').

La quantité θ est la *vitesse du son* dans le gaz, sous la pression et à la température considérées. C'est en effet la vitesse avec laquelle un mouvement quelconque (tel qu'une vibration sonore), se propage dans ces conditions.

167. — Les relations (23) nous font, en outre, connaître les conditions de compatibilité. Si l'on considère le mouvement du fluide comme déterminé par les positions et les vitesses des molécules à l'instant t, $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$ sera une inconnue que l'on devra tirer de l'équation (5).

Au contraire, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t}$ sont des données de la question, lesquelles sont discontinues pour la valeur considérée de a. Entre ces données on devra avoir, pour qu'il y ait compatibilité, la première relation (**23**), θ désignant la racine carrée de l'expression (**24**), prise avec un signe qui dépendra du sens de la propagation ([1]).

Dans le cas contraire, la discontinuité se divisera ([2]) en deux dont l'une se propagera avec la vitesse $+\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}}$, l'autre avec la vitesse $-\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}}$.

Si la discontinuité était d'ordre supérieur au second, nous savons, d'après la théorie des caractéristiques, que la vitesse de propagation ne changerait pas de valeur. Pour obtenir le même résultat en partant de nos considérations cinématiques, il suffirait évidemment de remarquer que les variations dérivées $p^{\text{ièmes}}$ (p étant l'ordre de la discontinuité) formeraient alors une progression géométrique de raison θ et de substituer d'autre part ces variations dans l'une quelconque des équations obtenues en différenciant $p-2$ fois (**5**).

Il est clair, également, que l'expression de la vitesse de propagation ne serait pas changée si, parmi les forces accélératrices, en figurait une qui soit fonction de la vitesse, ou si, d'une manière générale, la force X dépendait d'une manière quelconque, non seulement de x, a et t, mais des dérivées premières de x par rapport à a et à t.

168. — D'après ce qui précède, il est impossible de traiter de la dynamique des gaz sans tenir compte des discontinuités qui s'y propagent : leur absence suppose un accord tout exceptionnel entre les données initiales et les mouvements des parois.

Cette circonstance ne se présente pas dans la dynamique des liquides, où l'on n'a jamais à étudier que des mouvements continus ou tout au plus des discontinuités stationnaires ([3]).

Elle constitue une difficulté toute spéciale de l'étude des gaz. On voit, en effet, qu'avant d'essayer de former les équations du mouvement, il est nécessaire de déterminer dans quel domaine ces équations seront valables : ce domaine étant limité par des ondes dont il faut étudier la propagation.

([1]) Comparer ch. v, n° **243**.

([2]) Nous reviendrons sur ce dédoublement, dans le cas général de l'espace au ch. v, n° **251**.

([3]) Voir ch. v, nos **244-246**.

Aussi possède-t-on très peu de résultats généraux sur les mouvements des gaz. Presque tous sont relatifs au mouvement rectiligne traité par Riemann et Hugoniot dans les Mémoires cités, et dont nous allons nous occuper maintenant.

169. — Nous nous bornerons au cas où le gaz est primitivement (ou, du moins, peut avoir été à un instant quelconque), à une pression et à une température uniformes, de sorte que l'équation du mouvement se réduit à

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \psi(\omega)\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \tag{8}$$

où $\psi(\omega)$ représente, comme nous l'avons vu la fonction $-\frac{1}{\rho_0}\varphi'(\omega)$ et où ω est la dérivée partielle $\frac{\partial x}{\partial a}$. Quant à l'autre dérivée partielle $\frac{\partial x}{\partial t}$, elle n'est autre que la vitesse u.

La vitesse θ du son est égale à $\pm\sqrt{\psi(\omega)}$, et c'est ce qu'exprime l'équation (21'). Ecrivons, d'autre part, l'équation (22') : celle-ci nous donnera (p devant être ici remplacé par u et q par ω)

$$du = \theta\, d\omega = \pm\sqrt{\psi(\omega)}\, d\omega.$$

Cette équation est intégrable. En posant

$$\sqrt{\psi(\omega)} = \chi'(\omega), \tag{25}$$

où il est entendu que le radical du premier membre est pris avec le signe +) elle donne

$$u \pm \chi(\omega) = \text{constante}. \tag{26}$$

170. — Ainsi chacune des familles de caractéristiques admet une combinaison intégrable. Cette remarque a conduit Riemann à prendre comme variables indépendantes les quantités

$$\left\{\begin{aligned} u + \chi(\omega) &= \xi, \\ u - \chi(\omega) &= \eta. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

qui donnent

$$u = \frac{\xi + \eta}{2}, \tag{28}$$

$$\chi(\omega) = \frac{\xi - \eta}{2}. \tag{28'}$$

Pour effectuer ce changement de variables, nous commencerons par opérer la transformation de Legendre, c'est-à-dire par prendre pour variables indépendantes u et ω, et pour fonction inconnue la combinaison

(30) $$z = \omega a + ut - x$$

dont les dérivées partielles par rapport à u et ω ne sont autre que t et a; les nouvelles valeurs des dérivées secondes se calculent par les formules du n° **162** et l'équation (8) devient

(31) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = \psi(\omega)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

Il est maintenant aisé de passer aux variables ξ, η : il vient

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\chi''(\omega)}{\chi'^2(\omega)}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

ou, en tirant ω de l'équation (**28'**)

(32) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - f(\xi - \eta)\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0,$$

f étant une fonction définie par la relation

(33) $$f[2\chi(\omega)] = \frac{1}{4}\frac{\chi''(\omega)}{\chi'^2(\omega)}.$$

L'équation est ainsi rapportée à ses caractéristiques : elle a la forme de Laplace

(34) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial z}{\partial \xi} + b\frac{\partial z}{\partial \eta} + cz = 0.$$

171. — C'est précisément à propos de l'exemple qui nous occupe que Riemann [1] a été conduit à imaginer sa méthode d'intégration, étendue, comme on sait, par M. Darboux à l'équation générale (**34**).

---

(1) L'inconnue considérée par Riemann n'est pas z, mais une quantité w définie comme une intégrale de différentielle totale exacte, par la formule

$$dw = -\frac{z}{2}(d\xi + d\eta) + \omega\chi'(\omega)\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi - \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\right)$$

laquelle équivaut à la formule (3) (§ II) du Mémoire de Riemann (page 183 de la traduction française), les relations qui servent à passer des notations de Riemann aux nôtres étant

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} = \omega\chi'(\omega), \quad f(\rho) = -\chi(\omega), \quad r = \frac{\eta}{2}, \quad s = -\frac{\xi}{2}.$$

Rappelons que cette méthode [1] est à beaucoup d'égards analogue à celles dont nous avons parlé au chapitre I. Elle repose sur une identité toute semblable à celle de Green, savoir

$$(35)\qquad \iint \left[\zeta\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(\zeta)\right] d\xi\, d\eta = \int M\,d\eta - N\,d\xi,$$

dans laquelle

z et ζ désignent deux fonctions régulières quelconques ;
$\mathcal{F}(z)$, le premier membre de l'équation (**34**) ;
$\mathcal{G}(\zeta)$, le premier membre de l'équation

$$(36)\qquad \mathcal{G}(\zeta) = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\,\partial\eta} - a\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} - b\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial\xi} - \frac{\partial b}{\partial\eta}\right)\zeta = 0,$$

dite l'*adjointe* de la proposée ;

M, N, les expressions

$$(37)\qquad \begin{cases} M = az\zeta + \dfrac{1}{2}\left(\zeta\dfrac{\partial z}{\partial\eta} - z\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right), \\ N = bz\zeta + \dfrac{1}{2}\left(\zeta\dfrac{\partial z}{\partial\xi} - z\dfrac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right); \end{cases}$$

l'intégrale double étant étendue à une aire quelconque du plan des $\xi\,\eta$, et l'intégrale simple du second membre, au contour de cette aire.

Cette identité étant posée, la résolution du problème de Cauchy pour l'équation (**34**), la courbe γ étant un arc quelconque du plan des $\xi\eta$ assujetti à la condition de n'être coupé qu'en un seul point par une parallèle quelconque à l'axe des ξ et un seul point par une parallèle quelconque à l'axe des η : — autrement dit, le calcul en un point quelconque A (ξ', η') (*fig.* 11) d'une intégrale z de l'équation (**34**), donnée par ses valeurs e

---

L'équation aux dérivées partielles de Riemann est donc une transformée de l'équation (**32**).

Les transformations de cette espèce, applicables à une équation de Laplace et intervient l'intégration d'une différentielle totale exacte, ont été déterminées M. Darboux (*Leçons sur la théorie des Surfaces*, liv. IV, ch. VIII, n° **408**). (qui conduit à l'inconnue w correspond, dans la notation de M. Darboux, à

$$\mu = -2\omega\chi'(\omega),$$

la fonction ρ de M. Darboux étant égale à $\omega\chi'(\omega)$ et la solution z de l'équation qui conduit à cette valeur de ρ n'étant autre que $z' = \omega$.

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, liv. IV, ch. IV (tome II).

la formule précédente définit bien une fonction remplissant les conditions du problème.

Si, au lieu de l'équation $\mathcal{F} = 0$, on avait à intégrer l'équation

$$\mathcal{F} = f,$$

f étant une fonction donnée de ξ, η, la même méthode réussirait encore, la formule (38) étant simplement complétée par l'intégrale double $\int\int fg\, d\xi\, d\eta$, étendue à notre triangle curviligne : c'est ce qui résulte immédiatement de la formule générale (35).

172. — Enfin, la même méthode s'applique également au cas où la courbe γ est remplacée par un système de deux caractéristiques, les valeurs de z *seul* étant données sur chacune de ces deux lignes. La formule (38) est alors remplacée (pour l'équation sans second membre) par

$$(40)\quad z_A = (gz)_0 - \int_C^0 g\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + bz\right) d\xi - \int_B^0 g\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + az\right) d\eta.$$

173. — On ne dispose pas d'une méthode générale pour calculer la fonction de Riemann $g\,(\xi, \eta\,;\, \xi', \eta')$. Mais on est assuré de l'existence de cette fonction dès que les coefficients de l'équation sont analytiques et réguliers [1] ou même plus généralement dès qu'ils sont continus et dérivables [2].

Dans ces conditions, il résulte évidemment de ce qui précède que si la courbe γ n'est coupée qu'en un seul point par une parallèle à l'axe des ξ et en un seul point par une parallèle à l'axe des η (ainsi que nous l'avons supposé) le problème de Cauchy admet une solution et une seule.

D'une manière plus précise, si la fonction z et ses dérivées sont données tout le long d'un *arc* PQ satisfaisant à la condition précédente, cette fonction est déterminée dans tout le rectangle qui a pour sommets opposés P Q et dont les côtés sont parallèles aux axes.

174. — Ceci nous permet de combler pour les équations dont nous nous occupons en ce moment, une lacune dont nous avons signalé l'existence

---

(1) Darboux, *Loc. cit.*, tome II, pages 91-94.
(2) Darboux, *Loc. cit.*, tome IV, pages 353-359 (Note de M. Picard).

un peu plus haut (n° **161**). Supposons en effet que l'équation (**17**) ait la forme de Laplace : alors nous pourrons affirmer que deux surfaces intégrales, analytiques ou non, ne peuvent avoir entre elles un contact même d'ordre infini tout le long d'une ligne sans que cette ligne soit une caractéristique, puisqu'on pourrait alors considérer en particulier, sur la ligne en question, un arc le long duquel ξ et η soient chacun constamment croissants de manière que la donnée de z et de ses dérivées premières le long de cet arc détermine complètement cette fonction dans le voisinage.

Cette conclusion s'étend à l'équation (8). Considérons en effet le problème de Cauchy pour cette équation, c'est-à-dire supposons qu'on se donne une série de valeurs de a, t, ω, u, x, dépendant d'un paramètre. Ce problème peut être immédiatement ramené au problème analogue relatif à l'équation (31), puisqu'on connaîtra z et ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial \omega} = a$ et $\frac{\partial z}{\partial u} = t$ pour une série de valeurs de ω et de u.

La condition nécessaire et suffisante pour que ce problème cesse d'être déterminé est donc que la série de valeurs ainsi considérée soit caractéristique.

Physiquement parlant, si l'on imagine successivement deux mouvements M et M′ de notre masse fluide, lesquels coïncident pour $t \leqslant t_0$, $a \leqslant a_0$, ces mouvements coïncideront encore, pour une valeur de t supérieure à t_0, jusqu'à la valeur de a atteinte par l'onde partie de a_0 et se propageant avec la vitesse négative $-\sqrt{\psi(\omega)}$; autrement dit, jusqu'à la valeur.

$$a = a_0 - \int_{t_0}^{t} \sqrt{\psi(\omega)}\, dt.$$

Ce résultat n'avait été, jusqu'ici, établi en toute rigueur qu'en supposant les mouvements en question analytiques de part et d'autre de l'onde.

175. — Dans le cas des gaz parfaits, nous avons trouvé

$$(2') \qquad \varphi(\omega) = k\omega^{-m}$$

et, par suite,

$$(41) \qquad \psi(\omega) = k'\omega^{-m-1}, \qquad k' = \frac{mk}{\rho_0}.$$

$\chi'(\omega)$ est donc égal à $\sqrt{k'}\,\omega^{-\frac{m+1}{2}}$.

Comme cette quantité représente la vitesse du son, la constante $\sqrt{k'}$ n'est autre que *la vitesse* λ *du son dans l'état initial* : on a

$$(42) \qquad \lambda = \sqrt{k'} = \sqrt{\frac{mk}{\rho_0}}.$$

Si, comme cela a lieu dans la loi de détente de Poisson, m est différent de l'unité, il vient (en négligeant la constante additive)

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \chi(\omega) &= -\frac{2\sqrt{k'}}{m-1}\,\omega^{-\frac{m-1}{2}} = -\frac{2\lambda}{m-1}\,\omega^{-\frac{m-1}{2}} \\ \frac{\chi'(\omega)}{\chi^2(\omega)} &= -\frac{m+1}{2\sqrt{k'}}\,\omega^{\frac{m-1}{2}} = -\frac{m+1}{2\lambda}\,\omega^{\frac{m-1}{2}} \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent, la fonction f définie plus haut (formule **38**) a la valeur

$$(44) \qquad f(\xi - \eta) = \frac{\beta}{\xi - \eta},$$

$$(45) \qquad \beta = \frac{1}{2}\,\frac{m+1}{m-1}.$$

On est ainsi amené à *l'équation d'Euler*

$$(46) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\beta}{\xi - \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Lorsque β est un entier, l'intégrale générale de cette équation s'exprime en termes finis : elle est ([1])

$$(47) \qquad z = \frac{\partial^{2\beta-2}}{\partial\xi^{\beta-1}\,\partial\eta^{\beta-1}}\left(\frac{X - Y}{\xi - \eta}\right)$$

où X et Y sont des fonctions arbitraires l'une de ξ, l'autre de η.

Il se trouve que ce cas est approximativement celui de la loi de Poisson. La valeur généralement admise pour le coefficient m (rapport des deux chaleurs spécifiques) est, en effet 1,41 ; et l'hypothèse $m = 1{,}40$ donnerait $\beta = 3$.

176. — Mais quel que soit β, la méthode de Riemann permet de

([1]) DARBOUX, *loc. cit.*, n° **358** (tome II, p. 65).

résoudre le problème de Cauchy. On peut, en effet, former la quantité g : on trouve (¹)

(48) $$g(\xi, \eta; \xi', \eta') = (\eta' - \xi)^{-\beta} (\eta - \xi')^{-\beta} (\eta - \xi)^{2\beta} F(\beta, \beta, 1, \sigma)$$

σ désignant le quotient

$$\sigma = \frac{(\xi - \xi')(\eta - \eta')}{(\xi - \eta')(\eta - \xi')}$$

et F la série hypergéométrique

(49) $$\begin{cases} F(\beta, \beta, 1, \sigma) = 1 + \frac{\beta^2}{1^2}\sigma + \left[\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\right]^2 \sigma^2 + \dots \\ \quad + \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!}\right]^2 \sigma^n + \dots \end{cases}$$

177. — Nous avons exclu tout à l'heure le cas de $m = 1$, c'est-à-dire celui de la loi de Mariotte où $\varphi(\omega)$ est donné par la formule (**2**). Dans ce cas, on a

(50) $$\chi'(\omega) = \frac{\sqrt{k'}}{\omega},$$

(50′) $$\chi(\omega) = \sqrt{k'} \log \omega$$

et la quantité $\frac{\chi''(\omega)}{\chi'^2(\omega)}$ donne simplement la constante $-4l = -\frac{1}{\sqrt{k'}}$.

L'équation (**32**) est donc

(51) $$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + l\left(\frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0,$$

laquelle peut d'ailleurs, par le changement de variable $z = e^{l(\xi - \eta)} z_1$, se transformer en

(52) $$\frac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\,\partial\eta} + l^2 z_1 = 0.$$

Enfin l'on peut même réduire l à l'unité, en prenant pour nouvelles variables indépendantes $l\xi$ et $l\eta$.

L'équation ainsi obtenue, ou plutôt une équation aisément réductible à celle-là, est connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*. La fonc-

(¹) *Ibid.*, n° 360.

tion de Riemann $g(\xi, \eta; \xi', \eta')$ est également connue pour l'équation des télégraphistes et par suite, pour l'équation (**51**) ; on a

$$(\mathbf{53}) \qquad g(\xi, \eta; \xi', \eta') = e^{l[\eta - \eta' - (\xi - \xi')]} J\left(l(\xi - \xi')(\eta - \eta')\right)$$

où J désigne la fonction de Bessel

$$J(X) = 1 - \frac{X^2}{1^2} + \frac{X^4}{(2!)^2} + \dots + (-1)^n \frac{X^{2n}}{(n!)^2} + \dots$$

178. — La loi de Mariotte étant un cas limite de celle qui est représentée par la formule (**2'**), les résultats que nous venons d'obtenir doivent pouvoir se déduire de ceux qui ont fait l'objet des nos **175-176**. Il semble au premier abord, qu'il n'en puisse être ainsi et que, par exemple, l'équation (**51**) ne puisse dériver de (**46**).

Pour cette déduction, il est, en effet, nécessaire de tenir compte de la constante additive h qui aurait dû être ajoutée au second membre de (**43**). C'est, comme on sait, en faisant croître indéfiniment cette constante $\left(h = \frac{2\sqrt{k'}}{m-1}\right)$ que l'on passe de la formule (**43**) à la formule (**50'**) pour $m-1$ infiniment petit.

Augmentons donc $2\chi(\omega)$, ou son égal $\xi - \eta$, de la constante h, et remplaçons en même temps, β par lh. L'équation (**46**) deviendra

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{lh}{\xi - \eta - h}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0$$

et si, maintenant, on fait croître h indéfiniment on retombera sur (**51**).

Le même calcul peut évidemment s'opérer sur la fonction de Riemann donnée par la formule (**48**), et qui peut s'écrire

$$g(\xi, \eta; \xi', \eta') = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta' - \xi}\right)^\beta \left(\frac{\eta' - \xi}{\eta - \xi'}\right)^\beta F(\beta, \beta, 1, \sigma).$$

Si nous remplaçons $\eta - \xi$, $\eta' - \xi$ par $\eta - \xi + h$, $\eta' - \xi + h$ et β par lh le premier facteur deviendra

$$\left(\frac{\eta - \xi + h}{\eta' - \xi + h}\right)^{lh} = \left(1 + \frac{\eta - \eta'}{h + \eta' - \xi}\right)^{lh}$$

et tendra vers $e^{l(\eta - \eta')}$ pour h infini. Le second facteur aura de même pour limite $e^{l(\xi' - \xi)}$.

Quant à la série hypergéométrique $F(\beta, \beta, 1, \sigma)$, elle a bien pour limite la

fonction de Bessel qui figure dans la formule (53) : le terme général de la série F, est, en effet,

$$\sigma^n \frac{\left[\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)\right]^2}{n!^2}$$

$$= \frac{\left[(\xi-\xi')(\eta-\eta')\right]^n}{\left[(\xi-\eta'-h)(\eta-\xi'+h)\right]^n} \frac{\left[lh(lh+1)\ldots.(lh+n-1)\right]^2}{n!^2},$$

ce qui fait bien $\frac{\left[-l^2(\xi-\xi')(\eta-\eta')\right]^n}{(n!)^2}$, pour $h=\infty$.

179. — Le problème de Cauchy, résolu, comme nous venons de le voir, par la méthode de Riemann, est-il la traduction mathématique du problème physique qui nous est posé ?

Pour répondre à cette question, considérons d'abord le cas d'un tuyau indéfini, en supposant qu'on se donne les positions des molécules et leurs vitesses à l'instant initial, en tous les points. Dans ces conditions, x et ses deux dérivées premières ω et u seront connues, quelque soit a, pour $t=0$.

Nous sommes donc conduits au problème de Cauchy relatif à l'équation (8).

Or nous avons vu que ce problème revient au problème analogue relatif à l'équation (32).

Toutefois une objection se présente à l'esprit. Nous avons remarqué que la possibilité du problème de Cauchy est subordonnée à ce fait que sur la courbe γ, ξ et η sont toujours croissants ou toujours décroissants. Or il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi lorsque ξ et η sont déduits de la distribution donnée des molécules et de leurs vitesses. ξ, par exemple, peut fort bien avoir un maximum lorsque a varie, t restant nul. Seulement, il n'en résultera pas nécessairement l'impossibilité du problème posé primitivement. z pourra, en effet, avoir plusieurs valeurs différentes pour un même système de valeurs de u et de ω, si à ce couple de valeurs de u, ω correspondent plusieurs systèmes de valeurs des variables indépendantes données a, t. Non seulement il peut en être ainsi, mais u et ω peuvent être constants, z prenant toutes les valeurs possibles : c'est ce qui arrive pour le cas le plus simple, celui du fluide en repos ($x=a$; $u=0$, $\omega=1$). En un mot, — et ce fait, que nous retrouverons dès les numéros suivants, est évident d'après ce que nous avons vu au n° 163, — une singularité de z considéré comme fonction de u, ω ne donne pas nécessairement, après la transformation de Legendre, une singularité de x considérée comme fonction de a, t.

Malheureusement, l'inverse peut évidemment se produire. Ayant obtenu une valeur de z en fonction de u et de ω, il faudra, pour la considérer comme acceptable, calculer les dérivées $\frac{\partial z}{\partial \omega} = a$, $\frac{\partial z}{\partial u} = t$ et s'assurer, 1° que ces quantités peuvent être prises comme variables indépendantes ; 2° qu'elles prennent bien tous les systèmes de valeurs possibles pour lesquels $t > 0$. L'examen des conditions moyennant lesquelles il en est ainsi présenterait sans doute quelques difficultés.

180. — Considérons maintenant le cas du cylindre limité par des pistons. Alors x et ses dérivées ne seront connus que pour $0 \leqq a \leqq l$, et l'on aura ainsi seulement, dans le plan des $\xi\,\eta$, un arc de courbe le long de z et de ses dérivées par rapport à u et ω seront connus. Ces données permettront de calculer z dans un rectangle du plan des $\xi\,\eta$ (*fig.* 11). Dans le plan des at, ce rectangle correspondra évidemment à la série des portions du tube qui, à chaque instant, ne sont pas encore atteintes par les ondes issues des extrémités.

En dehors de la région du plan des at ainsi obtenue, il faudra tenir compte des conditions fournies par le mouvement du piston. Or il est aisé de voir que celles-ci ne peuvent pas être transformées comme les précédentes. Elles nous font connaître, en effet, pour chaque valeur de t, la valeur de x, et par conséquent, celle de u, a étant égal à 0 ou à l. Mais la *valeur de ω ne nous est pas donnée*. Il est donc impossible de tracer *à priori* la courbe correspondante du plan des $\xi\,\eta$.

La transformation de Legendre et la méthode de Riemann ne peuvent donc conduire à la détermination du mouvement dans ces nouvelles conditions. C'est par une étude directe qu'il y aurait lieu de tenter cette détermination, et il est aisé de voir à quelle sorte de problème analytique on serait ainsi conduit.

Le mouvement cherché doit, en effet, être compatible avec le mouvement primitif, dans lequel il se propagera suivant suivant une onde dont la marche est connue. Nous connaîtrons donc la valeur de x le long d'une ligne du plan des at, à savoir celle qui représente cette onde et qui est une caractéristique [1]. x est, d'autre part, également donné, (par le mou-

[1] Il doit y avoir concordance suivant cette ligne non seulement des valeurs de x, mais aussi de celles des dérivées u et ω. Mais, comme plus loin (note de la page 174) cette concordance des dérivées résultera de la première, pourvu qu'elle ait lieu initialement, c'est-à-dire pourvu que la vitesse initiale du piston soit égale à celle des molécules qui l'avoisinent.

vement du piston) le long d'une autre ligne sécante à la première, savoir la ligne $a = 0$ (ou $a = l$). C'est par cette double condition qu'il faudrait déterminer une solution de l'équation (8).

Le problème ainsi posé est beaucoup plus difficile que celui de Cauchy, même dans le cas d'une équation linéaire. On sait (¹), lorsque les données sont analytiques, établir l'existence d'une solution holomorphe, mais non mettre cette solution sous une forme suffisamment simple et utilisable.

Hugoniot a, au contraire, montré que ce résultat peut être atteint dans un cas important, celui où le gaz est primitivement en repos.

181. Les mouvements compatibles avec le repos. — Supposons pour $t = 0$, le gaz en repos, à une pression et à une température uniforme dans une portion que nous prendrons pour état initial. Communiquons à l'un des deux pistons, celui qui correspond à $a = 0$, un mouvement quelconque, sans toutefois qu'il y ait jamais de changement brusque de vitesse.

Un mouvement prendra naissance au contact de ce piston, mouvement qui se propagera dans le sens positif avec la vitesse $\lambda = \chi'(1)$ du son. Ce mouvement et l'état primitif du gaz, à savoir le repos, seront *compatibles*.

Il cessera d'en être ainsi à partir du moment où le mouvement ainsi créé est rencontré par le mouvement analogue produit par le piston situé à l'extrémité l, si ce piston est mobile. A ce moment naîtra un troisième mouvement compatible avec les deux premiers mais non avec le repos. A ce troisième mouvement, la théorie d'Hugoniot, telle que nous allons la présenter, n'est plus applicable.

Nous saurons néanmoins écrire son équation, une fois connues les deux premières.

En effet, la surface intégrale qui le représente se raccorde avec chacune des deux premières suivant deux caractéristiques de systèmes différents : savoir, une caractéristique $\xi =$ const. pour le premier des deux mouvements dont nous avons parlé plus haut (puisque la propagation du troisième mouvement s'y fait dans le sens négatif), une caractéristique $\eta =$ const. pour le second. Sur chacune de ces caractéristiques on connaîtra la série des valeurs de a, t, x, u, ω et par conséquent celle de z et de ses dérivées premières. Toutes ces quantités sont en effet supposées connues dans les deux premiers mouvements, et ne sont pas altérées par la discontinuité

(¹) Picard, in Darboux, *Loc. cit.*, tome IV, p. 361-362 ; Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, p. 303. — Voir plus loin ch. VII.

puisque celle-ci est au moins du second ordre. z étant connu sur les deux caractéristiques [1], on est ramené au problème du n° **172**.

Mais que le second piston reste en repos ou non, il arrivera toujours un moment où un nouveau mouvement prendra naissance ; c'est celui où l'onde partie de l'extrémité $a = 0$ atteindra l'extrémité opposée.

A ce moment, comme nous l'avons vu au n° **151** il y aura réflexion, et la discontinuité reviendra en arrière. Le nouveau mouvement ainsi produit n'est plus compatible avec le repos. Son étude ne peut pas se faire par la méthode que nous venons d'indiquer. Elle dépend des considérations développées au n° **180** et on ne possède pas, quant à présent de méthodes permettant de le calculer explicitement.

182. — Dans le cas précédemment étudié, où la vitesse de propagation θ est constante, l'état d'équilibre est celui où les fonctions f_1 et f_2 introduites au n° **145** ont les expressions $f_1(a+\theta t) = a + \theta t$; $f_2(a - \theta t) = a - \theta t$.

Les mouvements compatibles avec le repos sont donc caractérisés par ce fait que l'une de ces deux fonctions se réduit à la variable même dont elle dépend. La surface représentative correspondante est évidemment un cylindre.

Proposons nous de déterminer ces mêmes mouvements dans le cas où la fonction φ est quelconque, et soit à trouver une surface intégrale Σ qui se raccorde avec le plan $x = a$ suivant une caractéristique Γ correspondant à

$$\frac{da}{dt} = +\sqrt{\psi(\omega)} = +\chi'(1).$$

[1] Il semble que le problème soit impossible par suite du trop grand nombre des conditions, puisque l'on donne, sur chacune des deux caractéristiques de raccordement z *et ses dérivées*, alors que la seule donnée de z suffirait à déterminer la solution. Mais si ces valeurs d'une fonction z satisfaisant à l'équation de Laplace (**34**) sont données sur une caractéristique $\xi =$ const., les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ satisfont, sur cette ligne, à la relation.

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + a\frac{\partial z}{\partial \xi} = -\left(b\frac{dz}{d\eta} + cz\right)$$

(cas particulier de (**22**), qui détermine cette quantité $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ dès qu'elle est donnée en un point. Or cette relation est vérifiée par le premier mouvement donné. Si donc on détermine le troisième mouvement par la formule (**40**), il y aura bien coïncidence des valeurs de $\frac{\partial z}{\partial \xi}$. Cette coïncidence a, en effet, lieu en un point, le point commun aux deux caractéristiques, les surfaces intégrales qui correspondent aux trois mouvements primitifs étant alors tangentes entre elles.

Menons, par un point quelconque P de cette surface, la caractéristique Γ' du système opposé à Γ. Sur Γ', la quantité $u + \chi(\omega)$ est constante. Or la ligne Γ' rencontre nécessairement Γ et, sur Γ, la quantité $u + \chi(\omega)$ est partout égale à $\chi(1)$.

Donc la surface cherchée Σ satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$u + \chi(\omega) = \chi(1) \tag{54}$$

Ainsi, *dans un mouvement compatible avec le repos, la vitesse et la densité sont fonctions l'une de l'autre. Ces deux quantités croissent en même temps* (la vitesse étant prise avec sa valeur algébrique) puisque $\chi'(\omega)$ est positif et que ρ augmente quand ω diminue.

183. — On démontre aisément (1) que si une surface est telle que, entre les coefficients angulaires de son plan tangent, existe une relation indépendante des coordonnées du point de contact, cette surface est développable.

Tel est donc le cas de la surface cherchée, puisque u et ω sont les dérivées de x, considéré comme fonction de a et de t. Si par l'origine des coordonnées nous menons les différents plans dont les directions satisfont à l'équation (**54**), plans dont l'équation générale est

$$x = \omega a + \left[\chi(1) - \chi(\omega)\right] t, \tag{55}$$

ces plans enveloppent un certain cône C dont l'équation s'obtient en éliminant ω entre l'équation précédente et sa dérivée

$$a - t\chi'(\omega) = 0. \tag{55'}$$

Les génératrices de la développable Σ' sont parallèles aux génératrices de C. Ces génératrices étant les tangentes de l'arête de rebroussement, on voit que l'indicatrice sphérique de celle-ci est connue.

184. — En prenant pour ordonnées, non plus les valeurs de x, mais les vitesses ou les dilatations, (les coordonnées horizontales étant toujours a et t), on aurait pour représenter le mouvement non plus une développable, mais une surface réglée avec génératrices horizontales, puisque, sur chaque onde, la vitesse et la dilatation sont constantes.

---

(1) JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, tome I, p. 476 ; GOURSAT, *Cours d'Analyse* tome I, p. 524.

185. — Les conclusions précédentes subsisteront pour tout mouvement compatible avec le premier, si la caractéristique de raccordement est de même système que Γ.

Elles subsisteront donc s'il se produit des discontinuités quelconques (du second ordre au moins) dans le mouvement du piston $a = 0$. Elles ne seront modifiées, comme nous l'avons dit plus haut, qu'à partir du moment où on rencontrera un onde se propageant en sens inverse.

On arriverait encore à des résultats analogues si, dans l'état primitif du fluide, les molécules, au lieu d'être en repos, étaient animées de mouvements uniformes donnés par l'équation

$$x = \alpha a + \beta t, \tag{56}$$

α et β étant des constantes (mouvement qui satisfait évidemment à l'équation (**8**)).

Plus généralement le mode de raisonnement que nous venons d'employer s'appliquera à toute équation de la forme (**17**) dans laquelle une des familles de caractéristiques admet une combinaison intégrable dF, lorsqu'on cherchera les surfaces intégrales se raccordant, *suivant une caractéristique de l'autre système*, avec une surface satisfaisant à l'équation $F = \text{const}$.

186. — Si on essayait d'appliquer aux développables Σ que nous venons d'obtenir la transformation de Legendre utilisée précédemment, on n'aboutirait pas à des surfaces. Une surface développable a, en effet, pour polaire réciproque non pas une surface, mais une ligne, chaque point de cette ligne correspondant à une infinité de points de la développable, savoir tous ceux qui sont sur la même génératrice. L'équation (**54**) montre que cette ligne correspond dans le plan des $\xi\,\eta$ à la droite $\xi = \chi(1)$. Nous avons là un exemple évident des intégrales dégénérées auxquelles nous avons fait allusion précédemment (n° **183**).

187. — Les développables Σ sont les seules surfaces développables qui satisfassent à l'équation (**8**). Si, en effet, on suppose que l'on ait

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = f(\omega),$$

on en déduira, en différentiant successivement par rapport à t et à a,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} f'(\omega), \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} f'(\omega)$$

et l'équation (**8**) ne pourra être vérifiée (sauf pour $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial t}$ constants) que si $\psi(\omega) = f'^2(\omega)$.

188. — Il nous reste maintenant à déterminer complètement le mouvement dont nous venons de trouver les propriétés générales, en supposant donné le mouvement du piston.

Il suffit à cet effet de reprendre le mode de représentation employé aux nos **146** et suivants (*fig.* 10). Le mouvement du piston nous fera connaître la section $\alpha\beta$ (*fig.* 10) de la surface cherchée, par le plan nommé plus haut O. En chaque point de cette section, la développable admettra un plan tangent qui devra : 1° Contenir la tangente à cette courbe ; 2° Satisfaire à l'équation (**54**) ou, si l'on préfère, être parallèle à un plan tangent du cône C. Ce plan tangent sera donc connu. Quant à la génératrice de contact, elle sera parallèle à la génératrice correspondante du cône C. Le lieu de ces génératrices sera la surface cherchée.

Chacune des génératrices représente, comme on le voit, la propagation du mouvement donné au piston à l'instant correspondant à son point d'origine.

189. — Analytiquement parlant, soit

$$x_0 = f(t_0) \tag{57}$$

l'équation qui fait connaître l'abscisse x_0 du piston en fonction du temps t_0. On aura pour la vitesse de ce même piston, la valeur $u_0 = f'(t_0)$. La relation (**54**) donne dès lors la valeur ω_0 de ω au voisinage immédiat de ce piston. Par exemple, si la loi de détente est la loi de Poisson, ω_0 aura, d'après la formule (**43**), l'expression

$$\omega_0 = \left(1 + \frac{(m-1)u}{2\lambda}\right)^{-\frac{2}{m-1}} \tag{58}$$

λ étant toujours la vitesse du son dans l'état initial.

Le mouvement communiqué au piston à cet instant t se propage avec la vitesse $\chi'(\omega_0)$. Au temps $t > t_0$, il est parvenu au point dont l'abscisse initiale est

$$a = \chi'(\omega_0)\,(t - t_0) = (t_0 - t)\,\frac{du_0}{d\omega_0} \tag{59}$$

et auquel il communique à cet instant la vitesse u_0.

Nous supposons ici que ce point a été successivement atteint par ondes nées aux différents instants antérieurs à t_0 ; son abscisse actuelle donc évidemment

$$x = a + \int_{t'_0=0}^{t'_0=t_0} u_0(t'_0)\, dt$$

où, sous le signe $\int$, t désigne une fonction de t'_0 définie par l'équa (59), soit

$$t = t_0 - a\frac{d\omega_0}{du_0}.$$

Remplaçant t par cette expression, et, par conséquent dt par

$$dt_0 - ad\left(\frac{d\omega_0}{du_0}\right),$$

il vient

$$x = a + \int_0^{t_0} u_0(t'_0)\, dt'_0 - a\int_0 u_0 d\left(\frac{d\omega_0}{du_0}\right)$$

$$= a + \int_0^{t_0} u_0\, dt_0 - au_0\frac{d\omega}{du_0} + a(\omega_0 - 1)$$

ou (puisque $\int_0^{t_0} u_0\, dt_0 = x_0$ et en tenant compte de (59))

$$(60)\quad x = x_0 - (t - t_0)\left(\omega_0\frac{du_0}{d\omega_0} - u_0\right) = x_0 + (t - t_0)(\omega_0\chi'(\omega_0) + u_0)$$

x_0, ω_0, u_0 étant les fonctions de t_0 dont nous venons d'indiquer le calc L'élimination de t_0 entre les équations (59), (60) donne le résultat cherch

190. — On peut encore imaginer qu'au lieu du mouvement du pist on donne, pour chaque valeur du temps, la pression extérieure que piston supporte. Il est clair que les calculs qui précèdent ne seront essentiellement modifiés. Au lieu de u_0, c'est ω_0 qu'on calculera d'abord par la résolution de l'équation (2). On aura alors $u_0 = \chi(1) - \chi($ puis x_0 par une quadrature : après quoi, il ne restera plus qu'à écrire formules (59), (60).

191. — Grâce à l'intervention des ondes de discontinuité, nous avons pu, le gaz étant animé d'un mouvement donné à un instant donné, constater l'existence, *aux instants immédiatement suivants*, d'un mouvement satisfaisant tant aux équations internes qu'aux conditions aux limites. Avons-nous le droit d'en conclure que les discontinuités étudiées jusqu'ici permettent, à elles seules, d'assurer l'existence du mouvement *pour toute valeur ultérieure du temps*? Une telle affirmation ne serait nullement légitime.

Il suffit, pour s'en rendre compte, de se placer de nouveau dans le cas simple de la vitesse de propagation constante. Le gaz étant en repos pour $t = 0$, mettons en marche, à cet instant, le piston d'abscisse 0, dans le sens positif, c'est-à-dire de manière à comprimer le fluide. Dans nos hypothèses à un instant quelconque t, le mouvement ainsi créé s'étendra aux points dont les abscisses initiales sont comprises entre zéro et θt, le reste de la masse restant en repos.

Or, on peut évidemment, en accélérant convenablement le mouvement du piston, faire que son abscisse, à un certain instant t, soit supérieure à θt.

Il y a évidemment contradiction, les molécules voisines du piston devraient, à cet instant, coïncider avec certaines molécules encore en repos. Si nous voulons conserver nos hypothèses fondamentales d'impénétrabilité et de continuité (n^os^ **44-45**), nous allons être obligés de faire intervenir des phénomènes distincts de ceux que nous avons décrits dans ce qui précède.

Il convient de remarquer que cette hypothèse d'une paroi se déplaçant avec une vitesse supérieure à celle des ondes n'est nullement théorique : elle se présente dans l'application la plus importante que l'on ait jusqu'ici songé à faire de la Dynamique des gaz, à savoir l'étude du mouvement des projectiles. On sait, en effet, que la vitesse de ceux-ci est plus grande que celle du son.

192. — Toutefois, avant d'étudier les singularités qui doivent ainsi se produire lorsqu'on donne au piston un mouvement comprimant, nous devons en mentionner une qui se produit au contraire, dans le cas d'un mouvement décomprimant.

Pour calculer la valeur de ω, nous avons résolu, par rapport à cette quantité, l'équation (**54**).

Nous devons nous demander si cette résolution est possible. La dérivée du premier membre par rapport à ω est toujours différente de zéro (elle est

égale à $\chi'(\omega) = \sqrt{\psi(\omega)}$). u peut donc prendre toutes les valeurs négatives possibles, s'il tend vers $-\infty$ pour $\omega = +\infty$, c'est-à-dire si l'intégrale

$$\chi(1) - \chi(\infty) = -\int_1^\infty \chi'(\omega)\, d\omega = -\int_1^\infty \sqrt{\psi(\omega)}\, d\omega$$

est infinie.

C'est ce qui a lieu pour la loi de Mariotte, la fonction $\chi(\omega)$ étant alors logarithmique.

Mais il en est autrement dans le cas de la loi de Poisson. Pour celle-ci, la formule (**48**) donne

$$\chi(1) - \chi(\infty) = -\frac{2\lambda}{m-1}.$$

Lorsque le piston arrivera à prendre une vitesse négative et qui (en valeur absolue) soit, avec la vitesse du son correspondant à l'état initial, dans le rapport $\frac{2}{m-1}$ *le fluide cessera de le suivre* : entre eux un vide se produira, tout comme si on avait affaire à un liquide. La seule différence est que les dernières couches de gaz seront infiniment dilatées (puisque ω sera devenu infini [1]), au lieu que, pour un liquide même un peu compressible, la séparation aurait lieu à partir d'une certaine valeur finie de ω.

Tant que la vitesse du piston n'atteindra pas la valeur négative $-\frac{2\lambda}{m-1}$, son mouvement produira, au contraire, à chaque instant, dans les couches voisines, un état déterminé, qui se propagera comme nous l'avons dit, au moins pendant un certain temps, jusqu'à ce que se produisent les singularités dont il nous reste à parler.

§ 3. — LE PHÉNOMÈNE DE RIEMANN-HUGONIOT

193. — Si, comme nous l'avions supposé un instant tout à l'heure, mouvement obéit à l'équation (**8**) il est aisé de voir que la singularité de

---

(1) Nous nous plaçons, bien entendu, dans l'hypothèse toute théorique où le fluide garderait ses propriétés jusqu'au zéro absolu, que cette détente indéfinie permettrait d'atteindre.

l'existence nous est apparue comme nécessaire au n° **191** apparaîtra (et cela pour la première fois) au moment où une compression infiniment grande se produira, ω devenant nul.

En effet, le fluide étant supposé primitivement en repos, un mouvement qui s'y propagera dans le sens positif (à partir de l'instant $t = 0$) aura pour équation.

$$x = a + f(\theta t - a) \qquad (a < \theta t) \tag{61}$$

avec $f(0) = f'(0) = 0$. La fonction f sera donnée par la relation

$$f(\theta t) = x_0,$$

x_0 représentant encore l'espace parcouru par le piston. Si cette quantité x_0 est une fonction dérivable du temps, x sera une fonction dérivable de a et de t. Dans tous les cas, d'ailleurs, à chaque système de valeurs de a et de t correspond une seule valeur de x. Pour qu'inversement, à un système de valeurs de x et de t corresponde une seule valeur de a, il faut et il suffit que la dérivée $\omega = \frac{\partial x}{\partial a}$ ne change pas de signe. Si cette condition cesse d'être remplie, ce sera à partir du moment où ω s'annulera.

Comme les valeurs de ω se propagent à partir de l'extrémité $a = 0$, ce phénomène se produit tout d'abord au contact du piston.

194. — Nous allons voir avec Riemann et Hugoniot qu'il en est tout autrement lorsque la fonction $\psi(\omega)$ ne se réduit plus à une constante et, en particulier, dans le cas de la loi de Poisson.

Dans ce cas, en effet, ω ne peut devenir nul que lorsque la vitesse devient infinie. Mais, d'autre part, au lieu du cylindre défini par l'équation (**61**), nous aurons une surface développable dont l'arête de rebroussement sera située à distance finie, (du moins tant que la vitesse du piston ne sera pas constante).

Dès lors x, considéré comme fonction de a (t étant regardé comme constant) peut présenter deux sortes de singularités : 1° celles pour lesquelles $\frac{\partial x}{\partial a}$ est nul, analogues par conséquent à celles dont nous venons de parler ; 2° celles qui correspondent à l'arête de rebroussement de la surface.

C'est ce que l'on peut vérifier directement par l'étude de la dérivée $\frac{\partial x}{\partial a}$.

Si, en effet, on différencie les formules (59), (60) pour t constan trouve

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} da &= \left[(t - t_0)\,\chi''(\omega_0)\frac{d\omega_0}{dt_0} - \chi'(\omega_0)\right] dt_0 \\ &= -\left[\frac{(t - t_0)\,\chi''(\omega_0)}{\chi'(\omega_0)}\frac{du_0}{dt_0} + \chi'(\omega_0)\right] dt_0 \\ dx &= \omega_0\left[(t - t_0)\,\chi''(\omega_0)\frac{d\omega_0}{dt_0} - \chi'(\omega_0)\right] dt \\ &= -\,\omega_0\left[\frac{(t - t_0)\,\chi''(\omega_0)}{\chi'(\omega_0)}\frac{du_0}{dt_0} + \chi'(\omega_0)\right] dt_0. \end{aligned}\right.$$

Eliminant dt_0, on aura la valeur de $\frac{\partial x}{\partial a}$ par le quotient des dér $\frac{dx}{dt_0}$, $\frac{da}{dt_0}$, du moins tant que la première de ces quantités ne s'annulera Par conséquent, sauf le cas de $\omega = 0$, de $\omega = \infty$ lequel, comme no savons, ne peut se produire qu'au contact du piston, il ne peut y d'autres singularités que celles pour lesquelles $\frac{da}{dt_0}$ s'annule et par c quent aussi $\frac{dx}{dt_0}$. Comme on sait, ceci caractérise un point de rebro ment de la courbe décrite par le point (a, x) lorsque t_0 varie. Les dé premières de x par rapport à a et à t restent alors continues, mais le rivées secondes deviennent infinies.

Ici, d'après les formules (62), ce point de rebroussement est donn l'équation

$$(63)\qquad (t - t_0)\frac{\chi''(\omega_0)}{\chi'(\omega_0)}\frac{du_0}{dt_0} + \chi'(\omega_0) = 0.$$

195. — L'interprétation physique de cette circonstance est d'ail simple. Il suffit de nous rappeler que chaque génératrice de notre loppable représente la propagation, avec la vitesse $\chi'(\omega)$, d'un mouve déterminé, caractérisé par un système de valeurs déterminé de u et Un point de l'arête de rebroussement de notre surface correspond à la contre de deux génératrices extrêmement voisines, par conséquent rencontre de deux ondes consécutives, la seconde rattrapant la premiè

196. — Si, au lieu de la surface représentative des déplacement considérait celle qui figure, en fonction de a et de t, les dilatations, ou qui figure les vitesses, les deux ondes consécutives dont nous venon

parler correspondraient, sur l'une quelconque de ces deux surfaces, à deux génératrices ayant mêmes projections horizontales que celles de la développable. Ces nouvelles génératrices ne se rencontreraient d'ailleurs plus dans l'espace, et le point de rencontre de leurs projections horizontales serait simplement le pied de leur perpendiculaire commune, de sorte que l'arête de rebroussement de notre développable correspond à la ligne de striction de la surface des dilatations ou de celle des vitesses, ces surfaces ayant, en chaque point de cette ligne, un plan tangent vertical.

197. — Les surfaces ainsi construites permettent de se figurer d'une manière simple le phénomène qui nous occupe, en considérant leurs sections par les plans $t =$ const. Chaque point μ (*fig.* 12, 13) d'une telle section appartient en effet, à une certaine génératrice, correspondant à une onde déterminée, et nous savons que ces différentes ondes se déplacent avec des vitesses inégales, suivant qu'elles sont plus ou moins comprimées. Par conséquent, pendant un temps donné $t' - t$, elles auront décrit des chemins inégaux, et la courbe de section, lieu du point μ, se sera déformée. Si les ondes d'avant sont celles qui se propagent le plus rapidement, les distances horizontales auront augmenté et la courbe se sera étalée dans le sens horizontal (*fig.* 12). Mais, dans le cas opposé, (*fig.* 13) la courbe tend au contraire à se redresser et rien n'empêche qu'à un certain instant T, une de ses tangentes ne devienne verticale. Si l'on suivait la même déformation aux instants suivants t'', on verrait l'inclinaison de cette tangente sur la verticale changer de sens et les différentes parties de la courbe se dépasser les unes les autres, absolument comme il arrive dans une vague qui déferle.

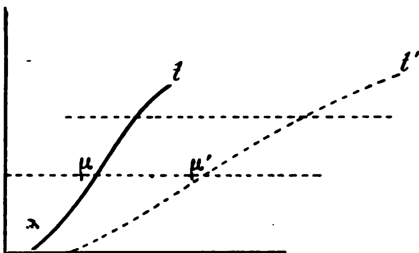


Fig. 12

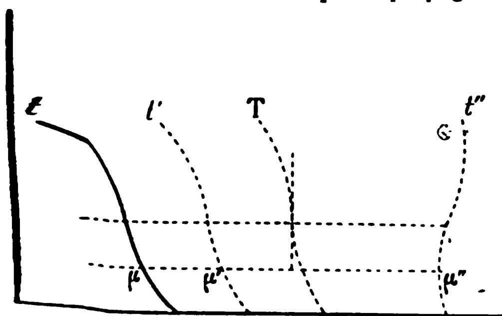


Fig. 13

198. — Dans le cas de la loi de Poisson ou de celle de Mariotte, les

ondes les plus comprimées sont celles qui se propagent le plus vite : autrement dit, la vitesse $\chi'(\omega)$ est une fonction décroissante de ω. Nous nous placerons donc dans l'hypothèse où cette condition est vérifiée (¹). Alors comme $\frac{1}{\omega_0}$ est croissant avec u_0, il faudra que cette dernière quantité soit croissante avec le temps ; — autrement dit, que le piston ait une accélération *positive* — pour qu'une onde puisse en rattraper une autre née antérieurement à elle.

Si donc on donne au piston un mouvement à accélération $\frac{du_0}{dt_0}$ négative (autrement dit. dirigée dans le sens de la décompression), les ondes ainsi engendrées ne se rattraperont point. De fait, la formule (**68**) où l'on a $\chi''(\omega) < 0$ montre que le point de contact de la génératrice de notre développable avec l'arête de rebroussement correspond à une valeur négative de $t - t_0$ et, par conséquent, aussi de a. La surface représentative du mouvement n'offrira aucune singularité, et donnera bien l'équation d'un mouvement physiquement possible (du moins tant que n'interviendra pas le phénomène signalé au n° **192**).

199. — Supposons, au contraire, que l'accélération $\frac{du_0}{dt_0}$ soit, à un instant quelconque, positive. Alors, l'onde née à cet instant rattrapera l'onde immédiatement antérieure, à un instant t donné par l'équation (**68**), soit

$$t = t_0 - \frac{dt_0}{du_0} \frac{\chi'(\omega_0)^2}{\chi''(\omega_0)}.$$

Le temps nécessaire pour que la rencontre des ondes consécutives se produise est, comme on le voit, pour une même valeur de la vitesse, d'autant plus considérable que l'accélération du piston est plus petite. Dans le cas, précédemment examiné, où l'on aurait affaire à des mouvements infiniment petits, cette rencontre serait indéfiniment éloignée.

Si l'accélération était celle qui est due à la pesanteur, le gaz étant primitivement à la température 0° et à la pression atmosphérique normale, la quantité $\chi'(\omega_0)$ serait initialement, c'est-à-dire pour ($\omega_0 = 1$) égale à la vi-

---

(¹) On peut remarquer que l'hypothèse opposée $\chi''(\omega) > 0$ ne pourrait être vérifiée, ou du moins ne pourrait l'être constamment, sans quoi p serait, à partir d'un certain moment, *inférieur* à une expression de la forme (3), ce dont nous avons montré l'impossibilité au n° **144**.

tesse du son soit, pour l'air, 330 mètres environ par seconde. $\frac{\chi''(\omega_0)}{\chi'(\omega_0)}$ aurait la valeur $-\frac{m+1}{2}\frac{1}{\omega_0} = -\frac{m+1}{2}$. En prenant $\frac{dt_0}{du_0} = \frac{1}{g}$, on trouverait que la première onde ne serait rattrapée par les suivantes qu'au bout d'environ 28 secondes, temps pendant lequel elle aurait parcouru un peu plus de 9 kilomètres.

Au contraire, dans le cas où le gaz serait comprimé par une explosion, comme dans les expériences de M. Vieille dont nous parlerons tout à l'heure, les ondes se rattraperaient dans l'intervalle de quelques centimètres.

En tout cas, ce qui est certain, c'est que, cette fois, la singularité ne saurait, comme dans l'hypothèse traitée au n° **193**, se produire au contact du piston. La valeur de $t - t_0$ est toujours différente de 0 : c'est dans la masse même du gaz que les ondes se rencontreront.

200. — Nous avons vu que la compression ne pouvait, dans l'hypothèse actuelle, devenir indéfinie. Il est, par contre, aisé de voir qu'on peut lui faire atteindre une valeur aussi élevée qu'on veut avant que le phénomène dont il s'agit se présente.

Cherchons, en effet, la condition pour que ce phénomène n'ait pas lieu avant l'époque T. Le temps t donné par la formule (**63**) devra être inférieur à T, soit

$$t_0 + \frac{dt_0}{d\omega_0}\frac{\chi'(\omega_0)}{\chi''(\omega_0)} < \mathrm{T}.$$

Or, cette inégalité exprime que le produit $\mathrm{A} = (\mathrm{T} - t_0)\,\chi'(\omega_0)$ est décroissant [1] On peut toujours faire croître la compression assez lentement pour qu'il en soit ainsi. Cette condition est même compatible avec celle-ci que ω_0 ait, à l'instant T, une valeur donnée arbitrairement petite. En effet, $\chi'(\omega_0)$ est égal à la dérivée changée de signe du produit dont nous venons de parler par rapport à t, pour $t = \mathrm{T}$, dérivée à laquelle on peut assigner, sans que A cesse d'être décroissant, une valeur (négative) arbitraire.

Cette valeur peut même être nulle, de sorte que l'on pourrait arriver à une compression indéfinie, si l'on pouvait augmenter indéfiniment la vitesse du piston suivant une loi convenable.

---

[1] Ceci est, au reste, évident *a priori* d'après l'équation (**59**), puisque nous avons à exprimer qu'une onde quelconque est, à l'instant T, en arrière de celles qui sont nées immédiatement avant elle

201. — Nous venons de supposer le produit A toujours décroissant. Qu'arriverait-il si l'on réglait, au contraire, le mouvement du piston de manière à ce que ce produit conserve une valeur constante?

Dans ces conditions, toutes les ondes se rattraperaient à l'époque T. Autrement dit, toutes les génératrices de notre développable se rencontreraient en un même point.

Cette développable se réduirait donc à un cône, cône évidemment égal au cône C considéré au n° **183**. La trace d'un tel cône sur le plan $a = 0$ fournirait ainsi le mouvement qu'il conviendrait de donner au piston pour que A soit constant.

L'équation (**59**) montre que la valeur constante de A n'est autre que l'abcisse du sommet du cône, c'est-à-dire du point de rencontre commun des ondes.

202. — On ne peut d'ailleurs continuer ce mouvement du piston jusqu'au temps $t_0 = T$, puisqu'alors la densité et, par suite, la vitesse deviendraient infinies.

Supposons qu'on le continue jusqu'à un instant t_1, — pour lequel u_0 aura une certaine valeur u_1 et ω_0 une certaine valeur ω_1 —, et qu'ensuite on diminue l'accélération de manière que l'onde née à l'instant t_1 ne soit plus rattrapée par les suivantes avant l'époque T (par exemple, qu'on rende le mouvement uniforme pour $t > t_1$). Alors, pour a infiniment voisin de $(t - t_1)\chi'(\omega_1)$ mais inférieur à cette quantité, la vitesse u serait sensiblement égale à u_1 et la dilatation à ω_1. En particulier, pour $t = T$, ces valeurs de u et de ω conviendraient au point $a = A - \varepsilon$, ε étant un nombre positif infiniment petit.

Or, pour $t = T$, $a = A + \varepsilon$, on a $u = 0$, $\omega = 1$.

Donc, pour $t = T$, $a = A$, la vitesse et la densité changeraient brusquement : *on serait en présence d'une discontinuité du premier ordre* et non plus du second.

203. — A partir de la rencontre des ondes consécutives, les équations (**59**) et (**60**) cessent de donner un mouvement physiquement acceptable.

C'est ce que mettent déjà en évidence la surface des vitesses et celle des dilatations puisque la section d'une de ces surfaces par le plan $t = T$ a une tangente verticale (*fig.* 13) et que, pour $t = T + \varepsilon$, le signe du coefficient angulaire de la tangente change en certains points, de sorte que cette courbe est coupée en plusieurs points par une ordonnée convenablement choisie. On serait dès lors conduit, pour une même particule et un même instant, à plusieurs valeurs de la vitesse.

204. — Pour reconnaître le même fait à l'aide de la développable représentative du mouvement, rappelons-nous qu'une développable est partagée par son arête de rebroussement en deux nappes et qu'une génératrice quelconque passe d'une nappe à l'autre au moment où elle touche cette arête de rebroussement.

Dans la développable considérée actuellement, si T est l'instant où la génératrice G_0 correspondant à l'onde initiale touche l'arête de rebroussement (en admettant, pour fixer les idées, qu'elle atteigne cette arête pour t positif et soit, d'autre part, la première à l'atteindre), toute la portion correspondant à $t < T$ appartiendra à une première nappe. La section par le plan $t = T - \varepsilon$ sera une certaine courbe venant se raccorder, en un point de G_0, avec la ligne droite, section du plan $x = a$ (*fig.* 14).

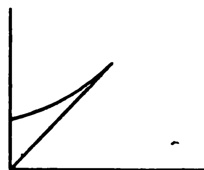


Fig. 14

Pour $t = T + \varepsilon$, d'après ce que nous venons de dire, la génératrice G_0 sera passée sur la seconde nappe de la surface. Donc, la section de cette dernière par le plan $t = T + \varepsilon$ ne viendra se raccorder avec la droite $x = a$ qu'après avoir franchi l'arête de rebroussement.

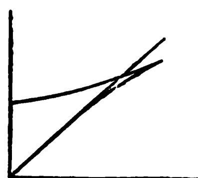


Fig. 14 bis

Pour une telle valeur de t, x serait représenté en fonction de a par une ligne ayant, non plus la forme représentée (*fig.* 14), mais celle qui est représentée dans la figure 14 bis et qui détermine avec la droite $x = a$ un petit triangle mixtiligne. Ceci est physiquement absurde, puisque toutes les ordonnées qui traverseraient ce triangle donneraient trois valeurs de x pour une valeur de a.

205. — Un nouveau problème se pose donc à nous, la recherche de la singularité qui prendra naissance à partir de l'instant T. Dans le cas particulier considéré tout à l'heure (n° **202**), cette singularité était une discontinuité du premier ordre. Nous sommes donc conduits à nous demander s'il n'en serait pas de même dans le cas général.

A cet effet, il faut d'abord étudier les conditions de propagation d'une telle discontinuité.

Cette étude ne saurait se faire, comme celle des discontinuités du second ordre, à l'aide de l'équation (**8**) du mouvement : car les raisonnements qui conduisent à cette équation supposent la vitesse continue. Il semble même, au premier abord, que les principes généraux de la Dynamique impliquent une telle discontinuité, et même l'existence de l'accélération, puisque c'est celle-ci qui fait connaître la force. Nous allons voir cependant que, conve-

nablement appliqués, ces principes permettent de rendre compte du phénomène dont il nous reste à traiter.

Le fluide étant toujours rapporté à un état initial homogène, soient u_1, u_2 les deux valeurs de u de part et d'autre de la discontinuité ; ω_1, ω_2, celles de la dilatation ; p_1, p_2, celles de la pression ; θ, la vitesse de propagation (comptée sur notre état initial). Nous aurons d'abord la condition cinématique

$$(64) \qquad u_1 - u_2 + \theta(\omega_1 - \omega_2) = 0.$$

Pour écrire maintenant la relation dynamique qui existe entre les forces agissantes et le mouvement, considérons deux positions consécutives A A′, B B′ occupées aux instants t et $t + dt$ par la tranche de discontinuité et dont la distance est, par conséquent, sur l'état initial, mesurée par θdt. Nous allons appliquer au petit volume fluide A A′, B B′ dont la masse est $\rho_0 S\theta\, dt$, en désignant par S la section du tube, et qui en supposant pour fixer les idées θ positif) passe de l'état (u_2, p_2, ω_2) à l'état (u_1, p_1, ω_1), l'équation fondamentale de la dynamique, en écrivant que la variation de sa quantité de mouvement, pendant le temps dt, est égale à l'impulsion totale, pendant le même temps, des forces qui agissent sur lui. Celles-ci sont, d'une part (s'il y a lieu) les forces appliquées aux éléments de masse et dont l'impulsion sera de l'ordre de dt^2 (puisque la force elle-même et la durée de son action contiendront toutes deux dt en facteur) ; d'autre part, les pressions sur les deux surfaces A A′, B B′, dont les impulsions respectives seront $p_1 S dt$, $-p_2 S dt$.

La vitesse de la portion de fluide envisagée, passant, pendant le temps dt, de u_2 à u_1, il vient (en divisant par $S dt$)

$$(65) \qquad p_1 - p_2 = \rho_0 \theta (u_1 - u_2).$$

Comme on le voit, le fait qu'une force finie (la différence de pression de part et d'autre de la discontinuité) produit, non une accélération, mais un changement brusque de vitesse, s'explique d'une façon toute naturelle ; il tient à ce que, grâce à la propagation de la discontinuité, la force en question n'est pas appliquée, comme il arrive d'ordinaire, à une masse de grandeur déterminée, mais à une masse infiniment petite avec le temps pendant lequel on la considère.

206. — Après avoir écrit les deux équations (64), (65), Riemann en obtient une troisième en exprimant que le changement de densité dans une

tranche traversée par la discontinuité se fait sans dégagement ni absorption de chaleur et est gouverné par la loi de Poisson, soit

(66) $$p_1 \omega_1^m = p_2 \omega_2^m,$$

égalité qui, au reste, est vérifiée d'elle-même si le gaz, parti d'un état parfaitement homogène, est arrivé à son état actuel par des transformations satisfaisant toutes à la loi de Poisson.

Par conséquent, si deux régions contiguës du fluide sont en discontinuité du premier ordre, il faut, pour qu'il y ait compatibilité, l'équation (**66**) et l'équation

(67) $$(u_1 - u_2)^2 = \frac{1}{\rho_0}(p_1 - p_2)(\omega_2 - \omega_1)$$

obtenue en éliminant θ entre (**64**) et (**65**).

207. — Si ces conditions sont remplies, la discontinuité se propagera avec une vitesse θ, solution commune des équations (**64**) et (**65**). On peut exprimer cette vitesse en fonction des pressions et des densités, de manière à obtenir une expression analogue à (**24**). L'élimination de $u_1 - u_2$ donne

(68) $$\theta = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho_0(\omega_2 - \omega_1)}}.$$

On voit que, contrairement à ce qui arrivait pour l'expression (**24**), la vitesse dépend ici des deux pressions et des deux densités. Si l'on considère p comme l'ordonnée d'un point dont l'abscisse est ω, les couples de valeurs (ω_1, p_1) et (ω_1, p_2) correspondront à deux points situés, d'après (**66**), sur une même courbe de la forme

(2') $$p\omega^m = k.$$

La quantité sous le radical, dans la formule (**68**), est, au facteur $-\frac{1}{\rho_0}$ près, le coefficient angulaire de la droite qui joint ces deux points.

La quantité analogue qui intervenait dans la formule (**24**) correspond de même au coefficient angulaire de la tangente à la courbe (**2'**). Lorsque la discontinuité est infiniment petite (p_1 très voisin de p_2) la vitesse θ est, comme il était naturel de s'y attendre, sensiblement égale à celle qui correspond à une discontinuité du second ordre. Mais il en est autrement si p_2 est notablement différent de p_1 et, en particulier, pour un système de valeurs déterminé de p_1 et ω_1, θ peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on

veut pour p_2 suffisamment grand. Ainsi la marche de l'onde n'est plus figurée par une caractéristique, mais par une ligne de direction quelconque.

208. — L'influence ainsi exercée par une discontinuité du premier ordre sur la vitesse de propagation apparaît clairement dans les expériences de M. Vieille [1].

Ces expériences ont consisté à provoquer, soit par la détonation d'une petite quantité d'explosif, soit par la rupture (sous l'influence d'une forte pression d'air) d'ampoules de verre ou de diaphragmes de collodion, un ébranlement assez énergique dont on enregistre la marche dans un tube bien cylindrique et parfaitement clos.

Si l'onde ainsi produite était du second ordre, il résulte des considérations précédentes que sa vitesse de propagation serait rigoureusement indépendante de la nature du mouvement propagé, et égale à la vitesse du son dans le milieu primitif (330 mètres par seconde, environ).

Or, en élevant suffisamment la pression, M. Vieille a pu obtenir des vitesses de propagation supérieures à 1200 mètres.

On voit que ce seul fait suffit à mettre en évidence l'existence d'une discontinuité du premier ordre et à montrer qu'elle modifie la vitesse de propagation.

D'autre part, si l'on inscrit, à l'aide d'appareils appropriés, la loi de variation des pressions en un point, on constate qu'à une certaine distance du lieu de l'explosion, la pression atteint immédiatement sa valeur maxima, tandis que, dans certaines expériences au moins, le même fait ne se met pas en évidence au voisinage immédiat du point de départ. Les tracés obtenus montrent donc alors la discontinuité comme étant initialement du second et changeant de nature au cours de sa propagation. C'est le phénomène même que nous avons considéré dans ce qui précède.

209. L'objection d'Hugoniot. — Les conclusions que nous venons d'obtenir ont été établies dans l'hypothèse où la loi de Poisson était applicable.

Hugoniot a montré que cette hypothèse n'était plus légitime dans le cas des condensations ou dilatations brusques.

Reportons-nous, en effet, à ce qui a été dit au n° **120** (ch. III). En cet endroit, nous avons établi que l'expression de la quantité de chaleur déga-

---

(1) C.-R. *Ac. Sc.* 1898-1899, *Mémorial des Poudres et Salpêtres*, tome 10, p. 177-200 ; 1900.

La relation entre les deux pressions et les deux densités s'obtient en éliminant $u_1 - u_2$ entre (64) et (69), soit

$$(70) \qquad \frac{(p_1 + p_2)(\omega_2 - \omega_1)}{2} = \frac{1}{m-1}(p_1\omega_1 - p_2\omega_2).$$

210. — Telle est la relation qu'Hugoniot a substituée à (66) pour exprimer que la condensation ou dilatation brusque se fait sans absorption ni dégagement de chaleur. On lui donne actuellement le nom de *loi adiabatique dynamique*, la relation (66), qui convient aux changements lents, étant désignée sous le nom de *loi adiabatique statique*.

Lorsque p_2 est très voisin de p_1 et ω_2 de ω_1, toutes deux donnent

$$\frac{\Delta p}{p} + m\frac{\Delta\omega}{\omega} = 0.$$

Dans le cas contraire, il est aisé de voir dans quel sens ces deux relations diffèrent entre elles. Celle de Poisson donne

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^m,$$

tandis que la valeur déduite de la formule (70) est

$$(70') \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(m+1)\frac{\omega_1}{\omega_2} - (m-1)}{m+1-(m-1)\frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Soit $r = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Les deux fonctions r^m et $\frac{(m+1)r-(m-1)}{m+1-(m-1)r}$, ont respectivement pour dérivées logarithmiques $\frac{m}{r}$ et

$$\frac{m+1}{(m+1)r-(m-1)} + \frac{m-1}{m+1-(m-1)r}$$
$$= \frac{4m}{2r(m^2+1)-(1+r^2)(m^2-1)};$$

pour r voisin de 1, la seconde de ces deux fractions est plus grande que la première [1]. Si donc, regardant p_1 et ω_1 comme connus, on considère ω_2

[1] En leur donnant le numérateur commun $4m$, la différence des dénominateurs est

$$2r(m^2+1)-(1+r^2)(m^2-1)-4r = -(1-r)^2(m^2-1).$$

comme une abscisse et p_2 comme une ordonnée, les équations (66) et (70) représenteront deux courbes osculatrices en leur point commun et dont la seconde monte plus vite que la première : autrement dit, pour une même variation de la densité, la pression éprouve un plus grand changement d'après la loi d'Hugoniot que d'après celle de Poisson.

Il y a plus : le rapport des pressions est nul ou infini dans la manière de voir d'Hugoniot sans qu'il en soit de même du rapport des densités, savoir, pour la valeur

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m+1}{m-1}.$$

Le second membre de cette égalité est, nous l'avons vu, à peu près égal à six pour la valeur admise du coefficient m. Ainsi, dans une discontinuité où la densité varie du simple au sextuple, la pression devient nécessairement nulle ou infinie.

Quant à la vitesse de propagation, il est clair que si (outre p_1 et ω_1) on donne ω_2, elle sera plus grande d'après (70) que d'après (66), et que l'inverse aura lieu si c'est p_2 qui est donné.

211. — Après le passage de la discontinuité du premier ordre, le produit $p\omega^m$ redeviendra constant en fonction du temps. Mais il est clair qu'en général ce produit aura une valeur différente pour chaque molécule : de sorte qu'ensuite l'équation aux dérivées partielles du mouvement n'aura plus la forme (8), mais bien la forme (6) (avec $X = 0$) et cela, même si le gaz était parfaitement homogène avant le passage de la discontinuité. k sera une fonction de a dont on obtiendra l'expression en calculant ce qu'est la discontinuité au moment où elle atteint la molécule d'abscisse a.

La forme de cette fonction dépend donc de toutes les circonstances antérieures du mouvement et, par conséquent, si l'on tient compte de l'objection d'Hugoniot, on voit qu'il n'existe aucune équation de la forme (8), ni même de la forme (6), qui soit vérifiée par tous les mouvements d'un gaz donné. Comme le remarque Hugoniot, pour obtenir une telle équation, il faut considérer k, dans l'équation (6), comme une fonction *inconnue* de a, et l'éliminer en différentiant par rapport à t. Ceci donne, comme il est aisé de le voir, deux équations aux dérivées partielles du quatrième ordre ([1]).

(1) Hugoniot, dans son Mémoire, obtient, comme résultat de cette élimination, une seule équation du troisième ordre. Il y a là une erreur, tenant à ce que l'auteur suppose préalablement effectué un certain changement d'état initial, lequel suppose la connaissance de la fonction k.

212. — Les expériences de M. Vieille paraissent confirmer les vu[es] d'Hugoniot que nous venons d'exposer. Dans le seul cas où l'on ait p[u] enregistrer à la fois les différences de pression et les vitesses de propagatio[n] les premières étaient d'environ 3 atmosphères, les secondes de 601 à 6[…] mètres par seconde, valeur à peine différente de celle de 600 mètres q[ui] correspond à la loi d'Hugoniot. La loi de Poisson donnerait une vitesse u[n] peu plus faible (environ 14 mètres de moins).

La divergence entre les deux hypothèses devient plus accusée lorsqu'o[n] passe à des discontinuités plus intenses, comme celle que produit le mou[-]vement des projectiles d'artillerie. Ceux-ci sont lancés avec des vitess[es] telles que 800 à 1 200 mètres. Ils sont précédés d'une onde aérienne qu[i], du moins dans sa partie frontale, est du premier ordre, sensibleme[nt] plane et se propage avec la même vitesse qu'eux. Or, quoique [le] mouvement de l'air soit évidemment assez différent, de ceux que no[us] étudions dans le précédent Chapitre ([1]), il existe une remarquable conco[r-]dance entre les résistances éprouvées par le projectile et les différences [de] pression correspondant aux valeurs observées de la vitesse. Ainsi on trouv[e] par exemple, une résistance mesurée de 15 kilogrammes par centimèt[re] carré pour une vitesse de 1200 mètres, laquelle correspondrait, dans [la] théorie d'Hugoniot, à $p_2 - p_1 = 15^{kg},64$. La loi de Poisson exigerait, a[u] contraire, une surpression de $17^{kg},24$ ([2]).

213. — Considérons maintenant une discontinuité du premier ord[re] quelconque, l'état du gaz étant caractérisé à gauche de cette discontinui[té] par les quantités p_1, ω_1, u_1 et à droite par les quantités p_2, ω_2, u_2.

En général, il n'y aura pas compatibilité : un nouveau mouveme[nt] prendra donc naissance et il y a lieu de rechercher les valeurs de p, u et [ω] correspondantes. C'est ce que nous allons faire en nous plaçant successiv[e-]ment dans l'hypothèse de Riemann (celle où la loi de Poisson reste exact[e]) et dans celle d'Hugoniot.

Nous supposerons d'ailleurs, dans le premier cas, que l'état considér[é] provienne d'un état antérieur parfaitement homogène, et que, par consé[-]quent, on ait, pour tous les états envisagés, l'équation (2).

En considérant encore une fois ω et p comme des coordonnées, cett[e]

([1]) Il est clair, d'une part, qu'il y a écoulement latéral, d'autre part, que la résis[-]tance n'est pas la différence entre la pression à la tête du projectile et la pressio[n] atmosphérique ordinaire, mais entre la pression de tête et la pression à l'arrièr[e] laquelle est plus petite que la pression atmosphérique. Comparer plus loin, n° 221.

([2]) Vieille, *Mém. Poud. Salp.*, *loc. cit.*, p. 255.

équation représente une courbe dont font partie les deux points (ω_1, p_1), (ω_2, p_2) et sur laquelle devra également se trouver le point (ω, p) correspondant à l'état inconnu qui s'établira dans la tranche intermédiaire. De plus, si u désigne la vitesse dans cette tranche, on devra avoir

$$(71)\qquad \begin{cases} u - u_1 = \sqrt{\dfrac{(p - p_1)(\omega_1 - \omega)}{\rho_0}} \\ u - u_2 = \sqrt{\dfrac{(p - p_2)(\omega_2 - \omega)}{\rho_0}} \end{cases}$$

et, par conséquent, en éliminant u

$$(72)\qquad a = u_1 - u_2 = \sqrt{P_2} - \sqrt{P_1}$$

P_1 et P_2 désignant respectivement les quantités qui figurent sous les radicaux des deux formules (71).

Mise sous forme entière, l'équation précédente peut s'écrire sous l'une des formes équivalentes

$$(73)\qquad \begin{cases} 4a^2 P_1 = (P_1 - P_2 + a^2)^2 \\ 4a^2 P_2 = (P_1 - P_2 - a^2)^2 \end{cases}$$

où a désigne $u_1 - u_2$. Dans le système de coordonnées adopté elle représente une conique inscrite au rectangle $A_1 A_2 B_1 B_2$ (*fig.* 15) qui a pour sommets opposés les deux points A_1, A_2 et dont les côtés sont parallèles aux axes. La corde $C_1 D_1$ qui joint les points de contact avec les côtés $A_1 B_2$, $A_1 B_2$ a pour équation $P_1 - P_2 + a^2 = 0$, et la corde analogue $C_2 D_2$ (*fig.* 15), $P_1 - P_2 - a^2 = 0$, pendant que $P_1 - P_2 = 0$ représente la diagonale $B_1 B_2$.

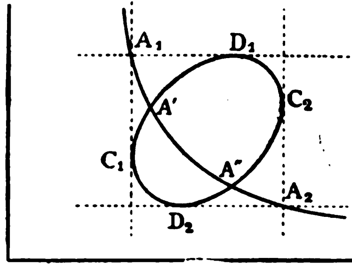


Fig. 15

Il est aisé de voir que, pour a^2 compris entre 0 et $\frac{1}{\rho_0}(p_1 - p_2)(\omega_2 - \omega_1)$, la conique (73) est une ellipse et que, lorsque a^2 dépasse cette limite $\frac{1}{\rho_0}(p_1 - p_2)(\omega_2 - \omega_1)$, elle est une hyperbole ayant ses deux branches respectivement comprises dans les opposés par le sommet des angles A_1 et A_2 du rectangle.

Dans les deux cas, cette conique coupera notre courbe (2′) en deux points A′, A″ situés, l'un sur l'arc $C_1 D_1$, l'autre sur l'arc $C_2 D_2$.

Mais pour que la solution correspondant à l'un des points A' ou A acceptable, elle doit satisfaire à une condition d'inégalité que nous n'a pas encore écrite. La tranche intermédiaire devant être contiguë *à ga* avec le mouvement (p_1, ω_1, u_1) et *à droite* avec le mouvement $(p_2, \omega_2,$ on doit évidemment avoir

$$(74) \qquad \theta_1 < \theta_2.$$

Les quantités θ_1 et θ_2 seront données par l'application de la formule en fonction de $u - u_1$ et de $u - u_2$, c'est-à-dire de $\sqrt{P_1}$ et de $\sqrt{P_2}$, les caux ayant la même détermination que dans l'équation (72).

On voit alors aisément que, des deux points A' et A', il en est tou un et un seul qui satisfait à l'inégalité (74) et qui, par conséquent fo la solution du problème posé, solution dans laquelle le mouvement i médiaire se propage en sens contraires à l'intérieur des deux mouven primitifs. Il est clair, d'après ce qui précède, que la pression et la de du nouvel état ainsi créé seront ou non comprises respectivement ent pressions et les densités primitives, suivant que la différence des vi données u_1 et u_2 sera inférieure ou supérieure à la moyenne géomét entre $p_1 - p_2$ et $\frac{1}{\rho_0}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}$.

211. — Mais on peut présenter cette même discussion sous une à certains égards plus simple en donnant un nom aux seconds mei des équations (71).

p_1, ω_1 étant toujours censés représenter les coordonnées du poin et p_2, ω_2 représentant de même les coordonnées d'un second point A_2 venons de donner à l'expression $\sqrt{\frac{1}{\rho_0}(p_1 - p_2)(\omega_2 - \omega_1)}$ (le radical pris avec le signe +) le nom de *distance hyperbolique* des deux p A_1, A_2 et de la désigner par la notation $\overline{A_1 A_2}$.

Cette distance hyperbolique ne sera d'ailleurs réelle, bien entendu les quantités ω_1, ω_2 ont un ordre de grandeur inverse de celui de p_1 p_2. Mais c'est ce qui aura toujours lieu si les deux points considérés a tiennent à la courbe (2').

Cela posé, lorsque nous donnons deux états du fluide entre les existe une discontinuité du premier ordre, ces deux états sont repré par deux points A_1, A_2 de la courbe (2'); et l'état cherché, par un troi point A de la même courbe. Les différences $u - u_1$, $u - u_2$ auront pour valeurs absolues les distances hyperboliques $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$. Si nous

posons toujours $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$, u sera extérieur à u_1 et à u_2 ou compris entre ces deux quantités suivant que p sera compris entre p_1 et p_2 ou leur sera extérieur. Dans le premier cas, la différence des deux vitesses données u_1 et u_2 sera égale à la différence de $\overline{AA_1}$ et de $\overline{AA_2}$, lesquels sont tous deux inférieurs à $\overline{A_1A_2}$. Dans le second, $|u_1 - u_2|$ sera la somme des distances $\overline{AA_1}$ et $\overline{AA_2}$, dont l'une au moins est supérieure à $\overline{A_1A_2}$.

Donc *la première hypothèse correspond nécessairement à*

$$|u_1 - u_2| < \overline{A_1A_2}$$

et la seconde à

$$|u_1 - u_2| > \overline{A_1A_2}.$$

Inversement, d'ailleurs, sur le segment A_1A_2 de la courbe (2'), la différence $\overline{AA_1} - \overline{AA_2}$ prend évidemment une fois, et une seule, toute valeur, positive ou négative, inférieure en valeur absolue à $\overline{A_1A_2}$ et, sur les arcs restants de cette courbe, la somme $\overline{AA_1} + \overline{AA_2}$ prend une fois, et une seule, toute valeur supérieure à $\overline{A_1A_2}$.

La conique (**73**) est le lieu des points tels que la somme ou la différence de leurs distances hyperboliques à A_1 et à A_2 ait une valeur donnée : on peut dire qu'elle a A_1 et A_2 pour *foyers hyperboliques*. Elle se réduit à une droite double lorsque cette valeur donnée est nulle, ou lorsqu'elle est égale à la distance $\overline{A_1A_2}$, absolument comme il arriverait si, au lieu de distances hyperboliques, on avait affaire à des distances ordinaires.

Si la pression p est extérieure à p_1 et à p_2, nous savons par le n° **118** qu'elle leur est nécessairement supérieure lorsque la discontinuité donnée est comprimante et qu'elle leur est inférieure lorsque cette discontinuité est dilatante.

Dans le cas contraire, celui où p doit être compris entre p_1 et p_2, le choix entre les deux points d'intersection de la courbe (2') avec la conique (**73**) se fera très simplement si l'on remarque que, pour $u_1 - u_2 > 0$, c'est-à-dire (n° **116**) si la discontinuité est comprimante, le point A est *plus près* de celui des deux points A_1, A_2 qui correspond à la plus grande pression que de l'autre, c'est-à-dire que, pour $p_1 > p_2$, la distance hyperbolique $\overline{AA_1}$ est plus petite que la distance hyperbolique $\overline{AA_2}$ (car on a alors $p < p_1$, $p_2 < p$; $u - u_1 = \overline{AA_1}$, $u - u_2 = \overline{AA_2}$). Le contraire a lieu pour une discontinuité dilatante.

Inversement, le point ainsi choisi satisfera bien à la condition

$$u_1 - u_2 = \pm \overline{AA_1} \pm \overline{AA_2},$$

les signes étant précisément ceux qui correspondent à $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$.

215. — Mais il faut noter que les points A' et A" peuvent fort bien ne pas être les seuls points d'intersection de la courbe (2') et de la conique (73). A' est bien le seul point de (2') situé sur l'arc $C_1 D_1$; et, de même, le point A" est unique sur l'arc $C_2 D_2$. Mais rien ne prouve qu'il ne puisse exister sur les arcs restants de la conique d'autres points d'intersection correspondant à des vitesses θ_1 et θ_2 de même sens. Il est même clair que de tels points existeront si, par exemple, la conique (73) est très voisine de la droite $A_1 A_2$.

Au reste, il est évident *a priori* que des mouvements de cette espèce doivent se produire ; c'est ce qui arrivera lorsque deux discontinuités du premier ordre marchant avec des vitesses différentes dans le même sens se rattrapent.

Si, pour fixer les idées, on suppose que la conique (73) est une ellipse, il est clair que les points d'intersection ne pourront être que sur l'arc inférieur $C_1 D_2$ (*fig.* 15) situé au-dessous de la droite A' A", et non sur l'arc supérieur $D_1 C_2$.

Ces nouveaux points, s'ils existent, seront en nombre au moins égal à deux ; on voit aisément, qu'ils correspondent à deux mouvements intermédiaires pour lesquels le sens commun des deux vitesses de propagation θ_1 et θ_2 est le même, ainsi que l'ordre de grandeur de ces deux vitesses (ceci tient à ce que les deux points représentatifs sont du même côté de la droite $C_1 C_2$). C'est donc, dans les deux cas, le même sommet de notre rectangle qui devra être considéré comme représentant l'état de la région de gauche.

Les mêmes considérations s'appliqueraient si, au lieu de rechercher les états qui suivent immédiatement une discontinuité du premier ordre (sans compatibilité) donnée, on se proposait de déterminer les états immédiatement antérieurs. Seulement il est évident que ce serait alors la région de gauche qui devrait correspondre à la plus grande valeur algébrique de la vitesse de propagation.

En particulier, si, comme nous supposions tout à l'heure, deux discontinuités marchant dans le même sens avec des vitesses différentes se rattrapent, les deux discontinuités nouvelles qui naîtront à ce moment se propageront nécessairement en sens contraires.

216. — Nous venons de trouver un cas dans lequel, à un état donné (position et vitesses du fluide à un certain instant correspondaient plusieurs mouvements possibles — au moins théoriquement — à partir de cet instant. Il est à observer que ce cas n'est pas le seul.

Reprenons, en effet, le mouvement envisagé au n° **201**. Nous avons vu que si le piston, après avoir atteint, suivant la loi considérée en cet endroit, une certaine vitesse u, conserve ensuite cette vitesse et se meut d'un mouvement uniforme, la surface représentative du mouvement se compose de deux portions de plans raccordées par une nappe conique, de sorte que jus-

qu'à un certain instant T, il existe deux discontinuités du second ordre seulement, lesquelles se réunissent à l'instant T en une discontinuité du premier ordre.

Or, les équations générales de la dynamique (en l'absence de frottement), possèdent, comme on sait, cette propriété de ne pas changer par le changement de t en $-t$; et il est d'ailleurs aisé de vérifier ce fait sur toutes les équations précédemment écrites.

Si donc, inversement, nous nous donnions, à l'instant T une discontinuité du premier ordre définie précisément par les mêmes éléments que celle qui s'établit à cet instant dans le mouvement dont nous venons de parler, nous pourrions supposer que le mouvement ultérieur se déduit de celui du n° **201** par le changement de t en $-t$. La discontinuité du premier ordre se résoudrait donc en discontinuité du second ordre comme il a été indiqué au n° **108**.

217. — Il faut toutefois observer que les discontinuités susceptibles de se résoudre ainsi doivent satisfaire à des conditions assez particulières. Sur le cône représentatif du mouvement étudié au n° **201**, on a

$$u + \chi(\omega) = \text{constante}$$

et, par conséquent, cette quantité $u + \chi(\omega)$ doit avoir la même valeur de part et d'autre de la discontinuité. Il est clair qu'il en devra être de même chaque fois que dans le voisinage du point conique existera un système de caractéristiques rencontrant toute ligne régulière issue de ce point sur la surface. Or, c'est ce qui se produira nécessairement. Si, en effet, on prend l'équation aux dérivées partielles sous la forme (**31**) ; on voit qu'elle admet l'intégrale $\frac{\partial z}{\partial u} = \text{constante}$, $\frac{\partial z}{\partial \omega} = \text{constante}$, c'est-à-dire le *plan* qui, après la transformation de Legendre, correspond à un *point* quelconque de l'espace où a, t, x jouent le rôle de coordonnées. Si l'on effectue cette même transformation de Legendre sur une surface intégrale à point conique, on aura évidemment une transformée tangente au plan correspondant à ce point conique tout le long d'une ligne (puisque u et ω prennent en ce point une infinité de valeurs). Cette ligne sera donc une caractéristique et sera, par conséquent, environnée de caractéristiques infiniment voisines remplissant la condition dont il vient d'être parlé.

Il résulte de là, en particulier, que dans une telle discontinuité, la différence des vitesses est toujours inférieure à la moyenne géométrique entre celle des dilatations, divisée par ρ_0, et celle des pressions. Cette moyenne a eu en effet pour expression d'après les formules (**7**), (**25**)

$$\sqrt{\frac{\omega_1 - \omega_2}{\rho_0}[\varphi(\omega_2) - \varphi(\omega_1)]} = \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi'^2(\omega)\,d\omega},$$

adis que la différence des vitesses est

$$u_1 - u_2 = \chi(\omega_2) - \chi(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi'(\omega)\, d\omega.$$

L'ordre de grandeur des deux quantités $u_1 - u_2$ et $\sqrt{\frac{1}{\rho_0}(\omega_1 - \omega_2)(p_2 - p_1)}$ est donc donné par l'inégalité de Schwartz (chap. I, n° **18**).

La relation

$$(75) \qquad u_1 - u_2 = \chi(\omega_2) - \chi(\omega_1)$$

doit, d'autre part, être complétée par une condition d'inégalité. Dans le mouvement étudié au n° **201**, les deux discontinuités du second ordre existant *avant* l'instant T viennent se rejoindre à cet instant en une discontinuité du premier ordre comprimante. Si, au contraire, on suivait le mouvement en sens inverse, comme nous venons de l'indiquer, la discontinuité du premier ordre qui existe à l'instant T et se dédouble *après* cet instant en deux discontinuités du second ordre serait dilatante. Il est aisé de voir qu'il en est forcément ainsi dans tout dédoublement analogue. Il suffit de remarquer encore que le signe de la discontinuité dépend (n^{os} **116** et **212**) de celui du produit $(u_1 - u_2)(\theta_1 - \theta_2)$. Or, le signe de $u_1 - u_2$ ou, d'après l'équation (**75**), celui de $\chi(\omega_2) - \chi(\omega_1)$, est celui de $\theta_1 - \theta_2$, puisque nous supposons que les ondes les plus comprimées sont celles qui se propagent le plus vite.

On voit par là qu'une discontinuité d'ordre un, née par la rencontre de deux discontinuités du second ordre, ne peut pas se dédoubler ensuite en deux discontinuités du second ordre, puisqu'elle devrait, pour cela, être dilatante et non pas comprimante.

218. — Nous avons supposé qu'entre les pressions et les densités de part et d'autre de la discontinuité existait la relation

$$(66) \qquad p_1 \omega_1^m = p_2 \omega_2^m.$$

S'il n'en était pas ainsi, comme dans l'hypothèse où nous nous plaçons actuellement le produit $p\omega^m$ ne peut changer ni d'un côté ni de l'autre, il est impossible qu'aux instants suivants, cette discontinuité soit tout entière reportée à l'abscisse $a + \theta\, dt$, en désignant par a l'abscisse de cette discontinuité à l'instant t (mesurée sur l'état initial) et en supposant θ différent de zéro. Nécessairement, il restera sur place quelque chose de la discontinuité primitive et comme une variation brusque de pression ne peut exister, comme nous l'avons vu, que dans une discontinuité qui se propage, ce sont les densités qui devront rester différentes. Toutefois, il ne

Il sera commode, ici, de prendre pour inconnues θ_1 et θ_2. L'élimination de p et de u entre les équations (77), (77') nous donne

$$(78)\qquad \rho_0(\theta_1^2\omega_1 - \theta_2^2\omega_2) = \frac{m-1}{2}(p_1 - p_2)$$

$$(79)\qquad \frac{\rho_0\theta_1^2\omega_1 - mp_1}{\theta_1} - \frac{\rho_0\theta_2^2\omega_2 - mp_2}{\theta_2} = \rho_0\frac{m+1}{2}(u_2 - u_1).$$

Nous supposons que les propagations des mouvements cherchés dans les mouvements donnés ont lieu en sens contraires. Si, pour fixer les idées, nous admettons encore que l'état désigné par l'indice 1 est celui de la région de gauche, nous devrons avoir

$$(80)\qquad \theta_1 < 0,\ \theta_2 > 0.$$

Or, si on la considère soit comme donnant θ_1, soit comme donnant θ_2, l'équation (79) est du second degré et a ses racines constamment réelles et de signes contraires. On en conclut aisément que si, maintenant, on considère θ_1 et θ_2 comme des coordonnées cartésiennes, la cubique représentée par cette équation se compose d'une branche impaire[1] sur laquelle θ_1 et θ_2 sont de même signe (et que nous devons par conséquent, laisser de côté) et de deux branches H_1 H_2 analogues à celle d'une hyperbole, asymptotes aux axes et situées, l'une dans l'angle défini par les inégalités (80), l'autre dans l'angle opposé. La courbe n'admettant aucune tangente parallèle aux axes, les valeurs absolues de θ_1 et de θ_2 varient constamment dans le même sens sur la branche impaire, constamment en sens contraires sur H_1 ou sur H_2.

Or l'équation (78) représente une hyperbole, les inégalités (80) étant vérifiées sur la moitié d'une des branches. Sur l'arc ainsi déterminé, les valeurs absolues de θ_1 et de θ_2 varient constamment dans le même sens. Il en résulte que cet arc coupe chacune des deux branches H_1 et H_2 de la cubique en un point et en un seul, ce qui donne une solution unique de la question. Il est à peine nécessaire d'ajouter que l'étude du cas où les discontinuités mobiles seraient du même côté de la discontinuité stationnaire (cas qui peut théoriquement se présenter, d'après ce que nous avons vu au n° 213, mais dont nous ne nous occuperons pas), ne pourrait pas se faire, cette fois, à l'aide des mêmes calculs que la précédente, et que les équations à écrire seraient notablement différentes.

---

[1] On sait qu'on nomme ainsi une branche de courbe qui est coupée par toute droite en un nombre impair de points.

On pourrait également se demander comment la pression intermédiaire p est située par rapport aux pressions p_1 et p_2. On répondra aisément à cette question en faisant varier le point (θ_1, θ_2) sur l'hyperbole (**78**) et calculant p par les équations (concordantes) (**77**), (**77'**); il est clair que p est croissant avec $|\theta_1|$ et $|\theta_2|$. Il suffira dès lors, de substituer dans l'équation (**79**) les points qui correspondent à $p = p_1$ et $p = p_2$.

220. — Le gaz étant primitivement en repos, supposons qu'on communique brusquement au piston un mouvement uniforme de vitesse donnée V. On peut se proposer de déterminer le mouvement qui prendra naissance dans ces conditions.

Comme l'ont montré tout d'abord MM. Sébert et Hugoniot ([1]), puis Hugoniot seul dans le Mémoire cité, les équations de compatibilité précédemment établies permettent de résoudre très simplement ce problème.

Nous allons voir, en effet, que, soit dans l'hypothèse de Riemann, soit dans celle d'Hugoniot, il existera un mouvement de la forme

$$x = \omega a + Vt \tag{81}$$

(ω constant) qui sera compatible avec le repos, la vitesse de propagation θ étant, bien entendu, constante. Dans ce mouvement, le gaz restera bien en contact avec le piston puisque, pour $a = 0$, on aura $x = Vt$.

De plus, la quantité k qui figure dans la formule (**2'**) sera constante même en tenant compte de l'objection d'Hugoniot, tout en ayant, dans ces conditions, une valeur différente de celle qui correspond au repos. k ne dépend en effet, que des éléments de la discontinuité : or ces éléments sont ici des constantes.

k étant constant, l'équation aux dérivées partielles aura la forme (**8**) et sera, par conséquent vérifiée par l'expression linéaire (**81**).

Partons d'abord des formules d'Hugoniot : p_0 étant la pression primitive au repos, p la pression inconnue qui existera dans la partie en mouvement, les équations de compatibilité seront

$$V + \theta(\omega - 1) = 0 \qquad \text{(condition cinématique).} \tag{82}$$

$$p - p_0 = \rho_0 \theta V \qquad \text{(condition dynamique).} \tag{83}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{m + 1 - (m - 1)\omega}{(m + 1)\omega - (m - 1)}. \tag{84}$$

Il y a lieu de remarquer que la solution serait à peu près évidente si la

(1) Sebert et Hugoniot, *C. R. Ac. des Sc.*, tome XCVIII, p. 507 ; 25 février 1884.

donnée du problème était comme au n° **190**, la pression p (supposée constante et différente de p_0). On aurait alors ω par l'équation (**84**), ou par l'équation de Poisson, si l'on restait au point de vue de Riemann, puis les deux équations (**82**) (**83**) se résoudraient absolument comme au n° **206**.

Revenons au problème posé, celui où la donnée est V et non plus p.

Nous prendrons alors θ pour inconnue : les équations précédentes donneront

(**85**) $$\theta^2 - \frac{m+1}{2}\theta V - \frac{mp_0}{\rho_0} = 0.$$

Le choix de l'inconnue θ offre cet avantage de permettre de décider immédiatement entre les deux racines de l'équation précédente : celles-ci sont, en effet, de signes contraires et, si comme nous le supposons toujours, le gaz est situé du côté des a positifs, c'est la racine positive qui convient seule, la racine négative correspondant au mouvement analogue engendré, par le même mouvement du piston, dans une masse gazeuse en repos située de l'autre côté de celui-ci.

Nous aurons donc

$$\theta = \frac{m+1}{4}V + \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + \frac{mp_0}{\rho_0}}.$$

Toutefois, une condition est encore nécessaire pour que la solution obtenue convienne au problème : il faut que l'on ait $p > 0$. Cette condition est toujours remplie pour $V > 0$; mais, dans le cas contraire, c'est-à dire si le piston a un mouvement décomprimant, on devra avoir

$$\theta < \frac{p_0}{\rho_0 V}$$

ce qui donne

(**86**) $$V^2 < \frac{2p_0}{(m-1)\rho_0}.$$

Pour des valeurs plus grandes de $-V$, le gaz cesserait de suivre le piston, absolument comme nous l'avons vu au n° **192** ; seulement, lorsque la vitesse limite était atteinte progressivement, son expression était $V = \frac{2\lambda}{m-1} = \frac{2}{m-1}\sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}}$, quantité supérieure à celle qui est donnée par la formule (**86**).

On doit aussi remarquer que, dans le cas de la vitesse brusquement communiquée, la pression et la température absolue deviennent seules nulles sans qu'il en soit de même de la densité.

221. — Si l'on restait dans les idées de Riemann sans tenir compte de l'objection d'Hugoniot, on devrait remplacer l'équation (**84**) par

$$(66') \qquad p\omega^m = p_0.$$

Celle-ci représenterait, comme précédemment, une courbe dont il faudrait prendre l'intersection avec l'hyperbole $(p - p_0)(1 - \omega) = \rho_0 V^2$ résultant de l'élimination de θ entre les équations (**82**) (**83**), ou plutôt, avec la branche de cette courbe qui correspond à $\theta > 0$. On trouvera encore une solution et une seule, l'un des points de la courbe (**66**) dont la distance hyperbolique au point $(1, p_0)$ est V.

La question se présenterait d'une manière tout analogue si le gaz, au lieu d'être primitivement au repos était animé d'un mouvement de la forme (**81**), avec une dilatation ω_0 et une vitesse V_0. On aurait à chercher, sur une courbe analogue à (**66**), un point situé à la distance hyperbolique $(V - V_0)$ du point (ω_0, p_0).

222. — On peut aisément déduire de ce qui précède une mesure de la résistance opposée par le gaz au mouvement du piston.

Supposons à cet effet celui-ci placé tout d'abord entre deux masses de gaz au repos et homogènes entre elles, l'une située du côté des a positifs, l'autre du côté des a négatifs. Si, dans ces conditions nous lui donnons instantanément la vitesse positive V, nous ferons naître, ainsi qu'on vient de le voir, deux ondes se propageant en sens contraires. L'une, correspondant à la racine positive θ_1 de l'équation sera de compression ; l'autre, correspondant à la racine négative θ_2 de la même équation, sera une onde de dilatation. Les pressions correspondantes p_1 et p_2 se calculeront immédiatement à l'aide de l'équation (**83**) et il viendra

$$(87) \qquad p_1 - p_2 = \rho_0 V(\theta_1 - \theta_2) = 2\rho_0 V \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + \frac{mp_0}{\rho_0}}.$$

Cette quantité représente la résistance cherchée, celle-ci étant la résultante des pressions exercées sur les deux faces du piston.

L'expression (**87**) croît à peu près proportionnellement à la vitesse pour de petites valeurs de celle-ci et au carré de cette vitesse lorsque sa valeur est grande. C'est précisément une loi assez analogue que l'on observe expérimentalement dans le mouvement des projectiles ; mais avec une croissance un peu plus lente [1]. Cette discordance n'a rien qui doive surprendre

---

[1] Ainsi que nous l'avons dit au n° **212**, la résistance paraît avoir sensiblement la valeur qu'elle prendrait s'il n'y avait pas dépression à l'arrière, c'est-à-dire si l'on avait $p_2 = p_0$ (et de plus $\theta_1 = V$).

et il est même naturel qu'elle se produise dans le sens que nous venons de dire puisque, dans notre tube, le piston ne peut se mouvoir sans refouler entièrement devant lui le gaz, tandis qu'à l'air libre, celui-ci peut glisser latéralement, ce qui diminue évidemment la résistance.

Cependant, même en restant au point de vue du mouvement rectiligne, les considérations précédentes soulèvent deux observations.

Tout d'abord, elles doivent être modifiées si la vitesse V dépasse la limite (86). Alors, en effet, le vide se fait à la face postérieure du piston ; par conséquent, la pression (négative) p_2 doit être remplacée par 0. La résistance est donc

$$R = p_1 = p_0 + \rho_0 V\left(\frac{m+1}{4} V + \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\right)^2 V^2 + \frac{p_0}{\rho_0}}\right).$$

En second lieu, il est plus naturel de supposer que le piston acquiert la vitesse V progressivement et non instantanément. Ce sont alors les formules des nos 141 et 182, qu'il convient d'appliquer, et non celles dont nous venons de nous servir. On devra donc calculer ω par la formule (54), (no 182) et prendre $p = \varphi(\omega) = p_0 \omega^{-m}$, ce qui donne

$$p = p_0 \left(1 + \frac{m-1}{2} \frac{V}{\lambda}\right)^{\frac{2m}{m-1}},$$

$\lambda = \sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}}$ désignant encore la vitesse du son en l'état primitif.

Le même calcul pour l'onde d'arrière donnera

$$p = p_0 \left(1 - \frac{m-1}{2} \frac{V}{\lambda}\right)^{\frac{2m}{m-1}}$$

d'où

$$R = p_0 \left[\left(1 + \frac{m-1}{2} \frac{V}{\lambda}\right)^{\frac{2m}{m-1}} - \left(1 - \frac{m-1}{2} \frac{V}{\lambda}\right)^{\frac{2m}{m-1}}\right]$$

le terme soustractif devant toutefois être remplacé par 0 lorsque V dépasse la limite trouvée au no 192.

La résistance ainsi calculée croîtrait notablement plus vite que le carré de la vitesse.

Seulement, à son tour, le raisonnement précédent ne peut être accepté sans objection. Il suppose, en effet, que la singularité de Riemann-Hugoniot ne se produit pas. Or l'hypothèse contraire est bien plus vraisemblable,

dans les conditions où s'opère, par exemple, le mouvement des projectiles. Dès lors, il faudra admettre qu'il naît, à un instant déterminé, deux ondes de discontinuité du premier ordre, l'une se propageant en avant, l'autre en arrière. Cette dernière, par refléxion sur le piston, donnera une nouvelle onde à vitesse positive, laquelle, se propageant plus vite que la première (¹), la rattrapera. A ce moment deux nouvelles ondes naîtront ; et ainsi de suite.

Hugoniot admet que cet échange d'ondes aboutit finalement à la constitution d'un état identique à celui qui se produirait si la vitesse V était communiquée d'emblée au piston. Nous constaterons plus loin, dans un cas particulier, que les choses se passent bien réellement ainsi.

223. — Nous allons actuellement aborder la discussion du phénomène de Riemann-Hugoniot.

Nous supposerons pour simplifier, que le gaz, dans son état primitif, est au repos ; que l'onde de tête est la première à présenter la singularité considérée, et aussi que le mouvement communiqué par le piston à la partie du fluide qui l'avoisine (partie que nous supposerons située à gauche) est analytique. Nous allons tout d'abord former l'équation de ce mouvement. On doit, à cet effet, comme nous le savons, éliminer t_0 entre les équations (**59**) et (**60**).

L'arête de rebroussement de la développable ainsi obtenue est définie (n° 194) par l'équation

$$\frac{\partial a}{\partial t_0} = (t - t_0)\, \chi''(\omega_0)\, \frac{d\omega_0}{dt_0} - \chi'(\omega_0) = 0$$

qui, en général (et nous ne traiterons pas le cas exceptionnel où il en serait autrement), sera résoluble par rapport à t_0. Soit t'_0 la fonction de t qui substituée à t_0 vérifie l'équation précédente. Dans les équations (**59**) et (**60**), où t_0 n'est plus égal à t'_0, puisqu'on n'est plus sur l'arête de rebroussement, posons

$$t_0 = t'_0 + \tau.$$

a et x deviendront des fonctions de t et de τ lesquelles, ordonnées suivant les puissances de cette dernière variable, manqueront de termes du premier degré : soit

$$a = a_0 + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \dots, \tag{88}$$
$$x = X_0 + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots. \tag{89}$$

(¹) Voir plus loin, n° 228.

$a_0, X_0, a_2, a_3, \ldots; x_2, x_3, \ldots$ étant des fonctions de t, les deux premières telles que $a = a_0(t)$ et $x = X_0(t)$ donnent les équations de l'arête de rebroussement. Toutes ces fonctions de t sont d'ailleurs analytiques.

L'équation (88) permet de développer τ suivant les puissances de $\sqrt{a_0 - a}$, à moins que a_2 ne soit nul à l'origine, hypothèse que nous écartons encore [1].

Substituant ce développement dans (89), on obtient la valeur de x correspondant au mouvement de gauche. Nous désignerons cette valeur par X. On aura (en désignant par $X_1, X_{\frac{3}{2}}, \ldots$ des fonctions analytiques de t)

$$(90) \qquad X = X_0 + (a_0 - a) X_1 + (a_0 - a)^{\frac{3}{2}} X_{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

224. — Nous supposerons l'origine des espaces et celle des temps transportées au lieu et à l'instant où naît le phénomène. Dans ces conditions, X_0 et a_0 sont nuls avec t : ils commencent par des termes en λt, en désignant par λ la vitesse du son qui correspond à l'état primitif du fluide. De plus, la surface étant tangente au plan $x = a$, on a $X_1(0) = -1$.

Nous conviendrons que, dans l'équation précédente, le radical $(a_0 - a)^{\frac{1}{2}}$ est pris avec sa détermination positive. S'il en est ainsi, le coefficient $X_{\frac{3}{2}}(0)$ doit être positif. En effet, le mouvement du piston étant comprimant, on doit avoir $X > a$, et ceci ne peut avoir lieu, pour t très petit et d'ordre au plus égal à celui de $a_0 - a$, que si $X_{\frac{3}{2}}(0) > 0$.

225. — Il s'agit maintenant d'obtenir l'équation du mouvement intermédiaire qui prendra naissance entre le mouvement ainsi défini et la partie de droite qui est au repos. Nous ne pourrons d'ailleurs le faire sans déterminer du même coup la marche des deux ondes qui se propageront ; autrement dit, en même temps que l'équation du mouvement, il faudra trouver le domaine dans lequel il est défini.

C'est la difficulté signalée au n° 168. Mais elle est ici particulièrement grave. Dans les autres questions de Mécanique où le mouvement cherché n'est pas représenté par une seule équation analytique dans tout le corps

---

(1) Si le coefficient a_2 est différent de zéro, il en est de même de x_2. Car pour $\frac{\partial a}{\partial t_0} = 0$, la quantité $\frac{\partial^2 x}{\partial t_0^2} = 2x_2$ est égale à $\omega_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t_0^2}$, en vertu de l'identité $\frac{\partial x}{\partial t_0} = \omega_0 \frac{\partial a}{\partial t_0}$. — Les deux coefficients a_2, x_2 sont d'ailleurs négatifs dans le cas actuel, la surface étant située à gauche de son arête de rebroussement.

considéré, les régions dans lesquelles ce mouvement a des expressions différentes, sont en général connues *à priori*. Tel est, par exemple, le cas d'une onde *du second ordre* qui se propage dans un gaz dont le mouvement antérieur est donné, *ce mouvement intervenant seul* dans l'expression de la vitesse de propagation. Il en est autrement, nous venons de le voir, dans la question actuelle.

Nous traiterons celle-ci, pour simplifier, sans tenir compte de l'objection d'Hugoniot. Nous admettrons que, à la naissance de la discontinuité du premier ordre, il s'établit dans la tranche intermédiaire une pression, une densité et une vitesse uniques. Il est aisé de voir, alors, que cette pression, cette densité et cette vitesse ne peuvent être autres que celles qui existent dans la tranche de droite (par conséquent, $u = 0$, $\omega = 1$) et qui, initialement, ont les mêmes valeurs dans la tranche de gauche ([1]).

Nous aurons alors à déterminer :

1° L'abscisse a_1 de la discontinuité entre le mouvement cherché et le mouvement de gauche ;

2° L'abscisse a_2 de la discontinuité entre ce même mouvement et la partie droite au repos.

Les deux ondes de discontinuité se propageant avec une vitesse initiale égale à vitesse λ du son introduite au n° **175**, a_1 et a_2 auront des développements commençant par des termes en $\pm \lambda t$: nous écrirons

$$a_1 = -\lambda t - \nu_{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} - \nu_2 t^2 \dots \tag{91}$$

et

$$a_2 = \lambda t + \mu_2 t^2 + \dots \tag{92}$$

en admettant par avance ([2]) (ce que la suite du calcul vérifiera) que a_2 ne contient point de termes à exposants fractionnaires en t.

3° L'équation du mouvement de la tranche intermédiaire.

([1]) Soient p_0 la pression primitive, p la pression et u la vitesse existant au premier moment dans la tranche intermédiaire. On devrait avoir à la fois

$$\frac{p - p_0}{u} = \theta_1, \qquad \frac{p - p_0}{u} = \theta_2,$$

θ_1 et θ_2 désignant les vitesses de propagation des ondes.

Or ceci ne peut avoir lieu que pour $p = p_0$, $u = 0$.

([2]) Il est clair que nous aurions pu laisser tout d'abord indéterminés les exposants de t aussi bien que les coefficients. La suite du calcul donnerait pour ces exposants les valeurs mêmes que nous leur avons assignées ici.

Les conditions à vérifier par ces différentes inconnues seront d'al l'équation aux dérivées partielles

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \psi\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$$

laquelle devra avoir lieu dans toute la tranche intermédiaire.

La fonction ψ étant donnée par la relation (41) on aura, en posant

$$(93)\qquad \frac{\partial x}{\partial a} = \omega = 1 + \varepsilon$$

et en tenant compte de la formule (42) qui définit λ,

$$(94)\quad \psi(1+\varepsilon) = \lambda^2\left[1 - (m+1)\varepsilon + \frac{(m+1)(m+2)}{2}\varepsilon^2 + \ldots\right].$$

En second lieu on devra avoir

$$(95)\qquad x = a, \qquad\qquad \text{pour } a =$$

$$(96)\quad x = X = X_0 + (a_0 - a)X_1 + (a_0 - a)^{\frac{3}{2}} X_{\frac{3}{2}} + \ldots, \qquad \text{pour } a =$$

De plus les deux discontinuités a_1 et a_2 devront vérifier les condition compatibilité. Nous n'avons pas à écrire les conditions cinématiques, l quelles sont implicitement contenues dans les conditions (95), (96).

Les conditions dynamiques et physiques donnent (puisque nous som dans l'hypothèse de Riemann)

$$\theta = \sqrt{\frac{\varphi(\omega) - \varphi(\omega_1)}{\rho_0(\omega_1 - \omega)}} = \pm\lambda\sqrt{\frac{1}{m}\,\frac{(1+\varepsilon)^{-m} - (1+\varepsilon_1)^{-m}}{\varepsilon_1 - \varepsilon}}$$

(en posant encore $\omega = 1 + \varepsilon$, $\omega_1 = 1 + \varepsilon_1$) ou

$$(97)\qquad \theta = \pm\lambda\left[1 - \frac{m+1}{4}(\varepsilon + \varepsilon_1) + \ldots\right]$$

Dans la partie au repos, ε_1 est nul. Au contraire dans le mouvem gauche il a une valeur en général différente de 0 et qui doit être c par l'équation (90).

On a donc les deux conditions supplémentaires

$$(98)\qquad \frac{da_1}{dt} = -\lambda\left[1 - \frac{m+1}{4}(\varepsilon + \varepsilon_1) + \ldots\right]$$

$$(99)\qquad \frac{da_2}{dt} = \lambda\left[1 - \frac{m+1}{4}\varepsilon + \ldots\right]$$

où il est entendu que, dans l'équation (99), ε est calculé pour a : que dans l'équation (98), ε et ε_1 correspondent à $a = a_1$.

226. — Pour développer x en série nous introduirons, au lieu de a et le t, les variables

$$\text{100)} \qquad \begin{cases} \xi = a + \lambda t. \\ \eta = \alpha - a, \end{cases}$$

lans lesquelles

$$\text{101)} \quad \alpha = \lambda t + (M_2 + \mu_2)\, t^2 + \dots = a_2 + M_2 t^2 + M_3 t^3 + \dots$$

lésigne un développement à coefficients indéterminés (sauf le premier) ırdonné suivant les puissances de t. La variable ξ n'est d'ailleurs introduite jue pour simplifier le calcul. Il n'en est pas de même, comme on va le voir, e la variable η, qui joue un rôle fondamental dans le développement. ious écrirons

$$\text{102)} \qquad x = a + F_{\frac{3}{2}} + F_2 + \dots = a + F$$

s F_i étant des ensembles homogènes en ξ, η de degrés marqués par leurs dices.

Comme on a

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial a^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\lambda\alpha' \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha'^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha'' \frac{\partial}{\partial \eta}$$

, α' désignant les deux premières dérivées de α par rapport à t), l'équa- ın (**8**) s'écrit

$$\text{03)} \begin{cases} 4\lambda^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\left[\psi\left(1 + \dfrac{\partial F}{\partial \xi} - \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\right) - \lambda^2\right] \\ \qquad - 2\lambda(\alpha' - \lambda)\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - (\alpha'^2 - \lambda^2)\dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \alpha'' \dfrac{\partial F}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Dans cette équation, α' et α'' peuvent se remplacer par leurs développe- ınts en t. Mais ils peuvent également se développer suivant les puissances la variable $\xi + \eta$, en fonction de laquelle t pourra s'exprimer, moyen- ıt la résolution de l'équation

$$\text{\textbf{04)}} \quad \xi + \eta = \alpha + \lambda t = 2\lambda t + (M_2 + \mu_2)\, t^2 + \dots + (M_h + \mu_h)\, t^h + \dots$$

ıans l'équation (**103**) ainsi écrite, un terme quelconque du développe- ıt de F (pourvu qu'il contienne à la fois ξ et η) donnera dans le premier nbre un terme de degré moins élevé que dans le second.

Nous désignerons par ξ_1 et η_1 les valeurs de ξ, η correspondant à $a = a_1$ soit

$$(105) \quad \begin{cases} \xi_1 = -\nu_{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} - \nu_2 t^2 \dots. \\ \eta_1 = 2\lambda t + \nu_{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} + (\nu_2 + M_2 + \mu_2)\, t^2 + \dots., \end{cases}$$

par ξ_2, η_2 les valeurs de ces mêmes variables pour $a = a_2$, soit

$$(106) \qquad \xi_2 = 2\lambda t + \mu_2 t^2 + \dots. + \mu_h t^h + \dots.$$

$$(106') \qquad \eta_2 = M_2 t^2 + \dots. + M_h t^h + \dots.$$

L'équation (96) s'écrira donc,

$$(107) \quad F(\xi_1, \eta_1) = X_0 - a_0 + (a_0 - a_1)(1 + X_1) + (a_0 - a_1)^{\frac{3}{2}} X_{\frac{3}{2}} + \dots.$$

l'équation (95)

$$(108) \qquad F(\xi_2, \eta_2) = 0$$

les équations (98) et (99),

$$(109) \quad \begin{cases} -\lambda - \frac{3}{2}\nu_{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} - 2\nu_2 t - \dots \\ = -\lambda\left[1 - \frac{m+1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F}{\partial \eta_1} - X_1 - \frac{3}{2}(a_0 - a_1)^{\frac{1}{2}} X_{\frac{3}{2}} - \dots\right) - \dots\right] \end{cases}$$

$$(110) \quad \lambda + 2\mu_2 t + \dots = \lambda\left[1 - \frac{m+1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F}{\partial \eta_2}\right) + \dots.\right].$$

227. — Cela posé, considérons, dans l'équation (103), les termes d'ordre $-\frac{1}{2}$. Ceux-ci seront exclusivement fournis par le terme $F_{\frac{3}{2}}$ du développement de F. On devra donc avoir $\frac{\partial^2 F_{\frac{3}{2}}}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$, d'où

$$(111) \qquad F_{\frac{3}{2}} = K\eta^{\frac{3}{2}} + K'\xi^{\frac{3}{2}}.$$

Les coefficients K et K' se détermineront par les conditions aux limites (107 et 108). Tout d'abord pour $a = a_2$, η est de l'ordre de t^2 au moins tandis que ξ est de l'ordre de t. La condition (108) montre dès lors que K' doit être nul.

228. — Au contraire, pour $a = a_1$, la quantité $a_0 - a$ a pour partie

principale $2\lambda t$, et il en est de même de η : la comparaison des termes d'ordre $\frac{3}{2}$ de x et de X donne donc

$$K = \pm X_{\frac{3}{2}}(0).$$

Nous voyons ainsi que K est en général différent de zéro. Nous aurons donc un terme en $\eta^{\frac{3}{2}}$ et, par conséquent, dans la surface représentative, une arête de rebroussement, correspondant à $\eta = 0$. Une seule des nappes séparées par cette arête devra faire partie de la portion utile (sans quoi, comme précédemment, on trouverait deux valeurs de x pour un même système de valeurs de a et de t) : nous conviendrons que c'est celle qu'on obtient en donnant à $\sqrt{\eta}$ sa valeur positive.

S'il en est ainsi, dans la condition (**107**), le radical $\sqrt{\eta} = \sqrt{2\lambda t + \dots}$ devra recevoir sa détermination positive. Comme il en est de même de $\sqrt{a_0 - a}$, en vertu de la convention faite au n° **224**, nous devrons écrire

$$K = X_{\frac{3}{2}}(0),$$

quantité positive, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut.

229. — Envisageons maintenant les équations (**98**) et (**99**) en ne retenant que les termes d'ordre $\frac{1}{2}$. Il n'existe aucun de ces termes dans la quantité ε pour $a = a_2$, η_2 étant d'ordre supérieur à 1 en t. Donc il n'en existe pas non plus, au premier membre de l'équation (**99**) et par conséquent nous voyons bien que a_2 ne contient pas de terme en $t^{\frac{3}{2}}$.

Pour $a = a_1$, des termes d'ordre $\frac{1}{2}$ apparaissent dans ε et ε_1 ; ces termes sont d'ailleurs connus. Nous connaissons, en effet, le second membre de l'équation (**102**) jusqu'aux termes d'ordre $\frac{3}{2}$ inclusivement ; et d'autre part le premier terme du développement de $\frac{\partial X}{\partial a}$ qui dépend de $\nu_{\frac{3}{2}}$ (savoir celui qui provient de $(a_0 - a_1)^{\frac{3}{2}} X_{\frac{3}{2}}$) contient cette quantité comme coefficient de la première puissance (au moins) de t.

On constatera d'ailleurs que les termes en $t^{\frac{1}{2}}$ se détruisent dans $\varepsilon + \varepsilon_1$ de sorte qu'on a $\nu_{\frac{1}{2}} = 0$.

230. — La détermination des termes d'ordre 2 est tout ana
L'équation (**108**) nous donne

$$4\lambda^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{9}{8}(m+1)\lambda^2 K^2,$$

car le seul terme d'ordre zéro qui existe au second membre de
équation est obtenu en multipliant le facteur $\frac{3}{4}\eta^{-\frac{1}{2}}$ (provenant de
par $\frac{3}{2}(m+1)$ $\left[\text{provenant de } \psi\left(1+\frac{\partial F}{\partial \xi}-\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)-\lambda^2\right]$. On aura do

$$F_2 = \frac{9}{32}(m+1)K^2\xi\eta + K_2\eta^2 + K'_2\xi^2$$

K_2 et K'_2 étant des coefficients à déterminer. L'équation (**108**) do
$K'_2 = 0$, car les autres termes sont tous d'ordre 3 au moins. L'éq
(**107**) fera connaître K_2 par l'examen des termes d'ordre 2 en t.
l'équation (**109**) détermine ν_2.

Au contraire, la condition (**110**) ne suffit pas à déterminer μ_2. Les t
en t contiennent, en effet, le coefficient arbitraire M_2 qui n'a joué ju
aucun rôle, et qui s'introduit par le terme $\frac{\partial F}{\partial \eta_2} = \frac{3}{2}K\eta_2^{\frac{1}{2}} + \dots$

Désignons par

(112) $$m_1 t + m_2 t^2 + \dots + m_h t^h + \dots$$

la racine carrée *positive* du développement $\eta_2 = M_2 t^2 + M_3 t^3 + \dots$
sorte que m_1 est la racine carrée positive de M_2. C'est ce développ
(**112**) qui devra être substitué à $\eta_2^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation (**110**) : nous a
alors :

(113) $$\mu_2 = \frac{3\lambda(m+1)K}{16} m_1 + \frac{9}{128}\lambda^2(m+1)^2K^2.$$

231. — Nous avons à trouver entre μ_2 et m_1, une seconde rel
celle-ci va résulter de la considération des termes d'ordre $\frac{5}{2}$.

Considérons, dans l'équation (**103**), les termes d'ordre $\frac{1}{2}$. Certains d

eux sont en $\eta^{\frac{1}{2}}$. Mais deux autres sont en $\xi\eta^{-\frac{1}{2}}$: ce sont ceux qui proviennent du produit de $\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{3}{4}\eta^{-\frac{1}{2}} + \ldots$, d'une part par

$$\psi\left(1 + \frac{\partial F}{\partial a}\right) - \lambda^2 = \lambda^2\left[-(m+1)\left(\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\right) + \ldots\right]$$
$$= \frac{3}{2}\lambda^2(m+1)\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{32}(m+1)^2 K^2 \xi + \ldots,$$

d'autre part, par

$$4\lambda(M_2 + \mu_2)\,t = 2(M_2 + \mu_2)(\xi + \eta) + \ldots.$$

Une fois intégrés par rapport à ξ et à η, ces termes contiendraient en facteur η à la puissance $\frac{1}{2}$ seulement.

Or cette circonstance rendrait inexacte la formule (113) : la quantité $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta}$ contiendrait, en effet un terme en $\xi^2\eta^{-\frac{1}{2}}$, lequel, pour $a = a_2$, serait d'ordre 1 en t, puisque η est d'ordre 2.

C'est cet inconvénient que nous allons éviter en disposant du coefficient arbitraire $M_2 = m_1^2$ de manière à annuler ce terme en $\eta^{-\frac{1}{2}}$. Nous écrirons donc

$$(114) \qquad 2(M_2 + \mu_2) = 2(m_1^2 + \mu_2) = \frac{9}{32}(m+1)^2 K^2 \lambda^2$$

ce qui, joint à la relation (113), nous permet, cette fois, de déterminer m_1 et μ_2 : en éliminant ce dernier, il vient

$$m_1^2 + \frac{3}{16}\lambda(m+1)K.m_1 - \frac{9}{128}(m+1)^2 K^2\lambda^2 = 0.$$

Nous savons que nous devons prendre la racine positive de cette équation : nous aurons donc

$$m_1 = \frac{3\lambda(m+1)K}{16}$$
$$\mu_2 = \frac{27}{256}\lambda^2(m+1)^2K^2.$$

232. — Ayant ainsi calculé les premiers termes de nos inconnues,

nous allons montrer d'une manière générale, comment on obtiendra les suivants :

Supposons qu'on connaisse :

Le développement de F en fonction de ξ, η_1 jusqu'aux termes d'ordre q inclusivement (q étant un entier ou un entier $+\frac{1}{2}$) :

Le développement de a_1 en fonction de t jusqu'au même ordre ;

Les développements de α et de a_2, jusqu'à l'ordre $q-\frac{1}{2}$ seulement. Le premier de ceux-ci nous fait connaître t en fonction de $\xi+\eta_1$ jusqu'aux termes du même ordre $q-\frac{1}{2}$; et la connaissance du développement de $\alpha - a_2 = \eta_2$ équivaut à celle du développement (**112**) jusqu'aux termes en $t^{q-\frac{3}{2}}$.

Nous supposons de plus :

1° Que la partie connue du développement de F ne contienne nulle part η_1 avec l'exposant $\frac{1}{2}$;

2° que cette quantité η_1 soit la seule à y figurer avec des exposants fractionnaires, et qu'il n'en entre aucun dans les parties connues des développements de α et de a_2.

Dans ces conditions, nous allons déterminer les termes d'ordre $q-\frac{1}{2}$ de F et de a_1, les termes d'ordre q de α et de a_2.

Dans le second membre de (**103**), tous les termes d'ordre $q-\frac{3}{2}$ sont connus, sauf ceux qui peuvent provenir du produit de

$$(M_q+\mu_q)\,t^{q-1} = (M_q+\mu_q)\left(\frac{\xi+\eta_1}{2}+\dots\right)^{q-1}$$

(quantité qui fait partie du développement de α) par $\eta_1^{-\frac{1}{2}}$.

Mais dans ceux-ci, il y en a un qui est en $\xi^{q-1}\eta_1^{-\frac{1}{2}}$, avec le coefficient $\frac{M_q+\mu_q}{2^{q-1}}$. Nous déterminerons $M_q+\mu_q$ par la condition que ce terme détruise le terme semblable provenant de $\frac{d^2F}{d\eta_1^2}\div\left(1+\frac{dF}{d\xi}-\frac{dF}{d\eta_1}\right)$. Ceci donnera d'ailleurs $M_q+\mu_q=0$ lorsque q ne sera pas entier, puisque nous supposons que les termes déjà connus ne contiennent pas de puissances fractionnaires de ξ.

$M_q + \mu_q$ étant connu, nous connaîtrons $\frac{\partial^2 F_{q+\frac{1}{2}}}{\partial\xi\,\partial\eta}$ et par conséquent, $F_{q+\frac{1}{2}}$ lui-même à deux termes près, l'un en $\xi^{q+\frac{1}{2}}$, l'autre en $\eta^{q+\frac{1}{2}}$. Le premier de ceux-ci se déterminera par l'équation (**108**), le second par l'équation (**107**) ; ils donneront en effet, dans ces deux équations respectivement, les seuls termes encore inconnus [1] en $t^{q+\frac{1}{2}}$.

Moyennant ces résultats, on connaît, dans le second membre de l'équation (**109**), tous les termes en $t^{q-\frac{1}{2}}$ et on a, par conséquent, le coefficient $\nu_{q+\frac{1}{2}}$.

Dans l'équation (**99**), on connaît également tous les coefficients de t^{q-1}, sauf le coefficient $q\mu_q$ du premier membre et le coefficient $\lambda\frac{m+1}{4}\frac{3K}{2}m_{q-1}$ qui, au second membre, provient du développement de

$$\lambda\frac{m+1}{4}\frac{\partial F}{\partial\eta_2} = \lambda\frac{m+1}{4}\left(\frac{3K}{2}\eta_2^{\frac{1}{2}} + \dots\right).$$

On a donc la différence $q\mu_q - \frac{3\lambda K(m+1)}{8}m_{q-1}$. Comme on a obtenu, d'autre part, $M_q + \mu_q$ (c'est-à-dire, à des termes connus près, $2m_1 m_{q-1} + \mu_q$), μ_q et m_{q-1} sont connus. Ils sont d'ailleurs nuls pour q non entier, puisque le calcul fait au second membre de l'équation (**110**) n'introduit pas de puissances fractionnaires de t.

233. — Nous pouvons donc bien calculer de proche en proche tous les coefficients cherchés et nous aurons des développements satisfaisant formellement aux conditions du problème. Il resterait à prouver que ces développements convergent. Mais cette démonstration serait très difficile, sinon tout à fait impraticable, en se plaçant au point de vue que nous venons d'adopter. En réalité, c'est sous une forme toute différente qu'il y aurait lieu de traiter la question.

Ainsi que nous l'avons remarqué, le développement de x, ordonné suivant les puissances de ξ et de $\sqrt{\eta}$ (avec exclusion des termes du premier degré en $\sqrt{\eta}$) représente, en supposant sa convergence démontrée, une sur-

---

[1] Dans le terme $(a_0 - a_1)^h$ du développement de X, le terme $\nu_{q+\frac{1}{2}}t^{q+\frac{1}{2}}$ du développement de a_1 donne un terme en $t^{q+\frac{1}{2}+h-1}$. D'autre part, pour $h = 1$, ce terme est multiplié par $1 + X_1$, lequel est privé de terme constant.

face à arête de rebroussement. Il est aisé de voir que toute équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme (**17**) admet des surfaces intégrales de cette espèce. Il suffit, en effet, pour en obtenir une, de traiter le problème de Cauchy dans des conditions telles que la relation (**21**) soit vérifiée, mais non la relation (**22**).

Les considérations développées plus haut (n° **159**) montrent bien qu'alors les dérivées secondes sont infinies. Si d'ailleurs on effectue un changement de variables de manière à ce que la courbe γ devienne l'axe des x, il est aisé de s'assurer, au moins formellement, que z admet un développement suivant les puissances de x et $\sqrt{y}$. Plus généralement, supposons qu'en *un point* de la courbe γ la condition (**21**) soit vérifiée (à l'exclusion de (**22**)). Un calcul tout analogue à celui qui vient d'être exposé fournira un développement formel de z représentant une surface à arête de rebroussement (cette arête étant tangente à γ au point considéré).

Seulement, rien ne prouve que les développements ainsi obtenus soient convergents. C'est ce que l'on reconnaît au contraire si l'on opère une transformation de contact. Effectuons par exemple, la transformation de Legendre : nous devons remplacer x, y, z, p, q par $p, q, px + qy - z, x, y$; A, B, B′, C, D par D, B′, B — C, A. Après cette transformation, la relation (**21**) cessera d'avoir lieu à moins que primitivement on n'ait en outre la suivante

$$(115)\qquad \mathrm{D}(dp\,dx + dq\,dy) + \mathrm{B}'dq^2 + 2\mathrm{C}dp\,dq + \mathrm{B}dp^2 = 0.$$

Il est évident *a priori* que cette seconde relation est vérifiée si l'on a (**22**), puisque le système des deux équations (**21**) et (**22**) est invariant par une transformation de contact. Pour vérifier ce fait, il suffit de multiplier l'équation (**21**) par $dp\,dq$, l'équation (**115**) par $dx\,dy$, et d'ajouter : la relation obtenue se décompose en l'équation (**22**) et en la suivante

$$(116)\qquad dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

Nous excluons le cas où la relation (**22**) serait vérifiée : il se pourrait alors que l'on eût affaire à une caractéristique. La transformation de Legendre fera donc disparaître la singularité sauf le cas exceptionnel où l'on aurait (**116**). Le problème transformé aurait une solution régulière, la surface représentative de cette solution ayant seulement, en chacun des points primitivement singuliers, l'allure d'une surface développable, c'est-à-dire vérifiant en ces points la condition $rt - s^2 = 0$, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

En revenant à l'ancien système de variables, la singularité considérée

résulte des formules du n° **163**, qui font connaître l'effet de la transformation sur les dérivées r, s et t. Un calcul élémentaire, et d'ailleurs tout analogue à celui qui a été fait au n° **163**, montre que cette singularité est une arête de rebroussement (autour de laquelle la surface est représentée par une équation analogue à (**90**)) correspondant à la ligne qui est sur la transformée de Legendre le lieu des points paraboliques.

Reste le cas où l'on aurait (**116**) : alors la transformation de Legendre ne ferait pas disparaître la singularité. C'est ce qui arriverait si la surface cherchée avait, au voisinage de son arête de rebroussement, l'allure d'une surface développable. On peut toujours éviter cette circonstance en effectuant au préalable la transformation qui consiste à remplacer la fonction inconnue z par $z - \mathrm{F}(x, y)$, F étant une fonction arbitraire, p et q sont alors diminués des dérivées de celle-ci, dérivées dont on peut évidemment disposer de manière à ce que la relation (**116**) cesse d'avoir lieu sur γ. On voit donc que, dans tous les cas où l'on a (**21**) mais non (**22**), le problème de Cauchy a une solution représentée par une surface à arête de rebroussement. Il est d'ailleurs clair qu'inversement, toute surface intégrale à arête de rebroussement peut être considérée comme obtenue de cette façon ; elle peut être changée, par une transformation de contact convenable, en une surface régulière.

Tel sera donc le cas de la surface dont nous avons appris tout à l'heure à développer l'équation. La meilleure méthode pour étudier cette surface paraît dès lors être d'effectuer une transformation de contact telle que la surface (**90**) et la surface cherchée soient remplacées par des surfaces régulières. La question ainsi transformée sera alors une de celles auxquelles on peut essayer d'appliquer la méthode des fonctions majorantes. Seulement, une étude nouvelle sera nécessaire à cet effet, car cette question ne rentre dans aucun des problèmes traités jusqu'ici. Elle conduirait à les généraliser encore, en abordant le suivant, qui les comprend tous comme cas particulier et dont l'étude offrait en elle-même un grand intérêt :

Étant données cinq équations aux dérivées partielles

$$\mathrm{F} = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0,$$

trouver une surface intégrale de la première équation sur laquelle il existe une ligne l où l'on ait à la fois $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et une ligne l' où l'on ait à la fois $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ (ces données étant supposées telles que ces différentes conditions puissent être vérifiées ensemble à l'origine où les deux lignes l, l' devront passer).

En un mot, on ne connaît ici, aucune ligne par laquelle doit passer la

surface cherchée : on sait seulement que, le long de son intersection (inconnue) avec la surface (**90**), les coefficients angulaires de son plan tangent doivent vérifier l'équation (**98**) et qu'une équation analogue doit avoir lieu sur son intersection avec la surface $x = a$.

234. — Sans nous arrêter à rechercher si l'on pourrait disposer de la transformation de contact de manière à ce que ces conditions deviennent *ponctuelles*, en sorte qu'il en résulte la connaissance de deux lignes situées sur la surface transformée, nous remarquerons que la question se pose d'une façon un peu différente si ce n'est pas sur la première onde que le phénomène se produit tout d'abord, ce qui arrivera par exemple, si on commence par donner au piston une accélération négative pour changer plus tard le signe de cette accélération. Dans ce cas, l'arête de rebroussement de la surface qui représente le mouvement de gauche aura un point de rebroussement, de sorte que le développement (**90** et le développement cherché devront être modifiés en conséquence.

Il est également clair que la question deviendrait notablement plus compliquée s'il fallait tenir compte de l'objection d'Hugoniot. Non seulement, en effet, on aurait deux nouvelles surfaces à trouver et non point une seule, puisqu'il s'établirait au point origine du phénomène une discontinuité stationnaire portant sur les dilatations ; mais comme nous l'avons dit au n° **211**, aucune de ces surfaces ne satisferait à l'équation aux dérivées partielles (**8**) : cette équation serait remplacée par une équation de la forme (**6**) dans laquelle la valeur de k serait, non seulement une fonction de a, mais une fonction inconnue de cette quantité, fonction dont la forme dépendrait des diverses quantités qui figurent dans les équations (**91**) et suivantes.

Par contre, en restant au point de vue de Riemann, notons qu'on pourrait espérer une simplification de la question en donnant à m la valeur 1, 4 pour laquelle (n° **175**) l'équation (**8**) s'intègre explicitement.

235. — D'après ce qui précède, le phénomène de Riemann-Hugoniot donne naissance à deux ondes se propageant en sens inverse. Comme nous l'avons déjà remarqué (n° **222**), on obtient ainsi, par réflexion sur le piston et rencontre d'ondes se propageant avec des vitesses différentes, toute une série d'états nouveaux du fluide. Doit-on admettre avec Hugoniot que tous ces états tendent vers un état limite commun, celui que l'on obtiendrait en communiquant brusquement au piston la vitesse V qu'il acquiert en réalité par une accélération progressive ?

On ne pourrait évidemment répondre d'une façon générale à cette question qu'en faisant tout d'abord une étude approfondie du premier mouvement qui prend naissance à la suite du phénomène de Riemann-Hugoniot, ce que la méthode précédente ne permet pas d'obtenir. Nous nous contenterons donc de répondre à la question dans un cas où cette première étude est toute faite, celui qui a été considéré au n° **202** et où la loi d'accélération est telle que toutes les ondes successives nées au contact du piston se rattrappent en un même point. De plus, nous ne tiendrons pas compte de l'objection d'Hugoniot et nous supposerons la loi de Poisson toujours applicable.

Dans ces conditions, nous savons qu'à l'instant T où les ondes se rejoignent naît une discontinuité du premier ordre. Si, après avoir atteint la vitesse V en accélérant son mouvement suivant la loi indiquée au n° **202**, le piston se meut ensuite uniformément avec cette vitesse, les mouvements entre lesquels a lieu la discontinuité en question seront tous deux représentés par des équations de la forme (**81**) (ω étant calculé, pour le mouvement de gauche, par l'équation (**54**) et étant égal à 1 pour le mouvement de droite). Dès lors, on pourra prendre pour le mouvement intermédiaire une équation de la même forme, avec une vitese u_1, une dilatation ϖ_1 et une pression q_1 qui s'obtiendront comme il a été indiqué aux n^{os} **213-214**.

Ainsi qu'il a été constaté plus haut (n° **217**), la pression q_1 sera comprise entre la pression p_1 du mouvement de gauche et la pression primitive p_0. Au contraire, u_1 sera non seulement positif, mais supérieur à V. L'état intermédiaire du fluide sera représenté par un point de la courbe (**2'**), — point que nous désignerons, pour abréger, par la lettre q_1 qui représente la pression — lequel sera intermédiaire entre le point p_0 qui correspond à l'état de repos, et le point p_1 qui correspond au mouvement de gauche, le point q_1 (*fig.* 17) sera d'ailleurs déterminé par l'équation

$$\overline{q_1 p_0} - \overline{q_1 p_1} = V$$

où $\overline{q_1 p_0}$, $\overline{q_1 p_1}$ désignent les *distances hyperboliques* définies au n° **214**.

Lorsque l'onde rétrograde par laquelle l'état (q_1, ϖ_1) se propage dans l'état (p_1, ω_1) atteint le piston, elle donne naissance, par reflexion, à un nouvel état (p_2, ω_2) défini par la double condition d'être compatible avec le premier état intermédiaire, et de correspondre à une vitesse égale à V. La vitesse de propagation devant être positive, on verra, comme il est expliqué au n° **221**, que la pression p_2 est inférieure à q_1 et que, d'autre part, la distance hyperbolique $\overline{q_1 p_2}$ est égale à u_2 — V, c'est-à-dire à $\overline{q_1 p_1}$.

On voit que ce point p_2 peut être considéré, en un certain sens, comme le *symétrique* de p_1 par rapport à q_1, de sorte que la réflexion se traduit ici par un certain renversement des différences de pression.

236. — Soit P le point de la courbe (2') tel que $\overline{Pp_0}$ soit égal à V, la pression P correspondante étant supérieure à p_0.

Je dis que p_2 est inférieur à P.

C'est ce qui résulte du lemme suivant relatif aux distances hyperboliques.

Soit $p_1 p_2 p_3$ un triangle tel que les longueurs hyperboliques de ses côtés soient toutes trois réelles. Alors *la plus grande de ces longueurs sera au moins égale à la somme des deux autres*, l'égalité n'ayant lieu que si les trois points sont en ligne droite.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, $p_1 > p_2 > p_3$ et, par conséquent, $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, de sorte que la plus grande des trois longueurs hyperboliques sera $\overline{p_1 p_3} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}(p_1 - p_3)(\omega_3 - \omega_1)}$. Alors l'inégalité à démontrer pourra s'écrire (une fois élevée au carré)

$$\frac{1}{\rho_0}\left[(p_1 - p_2) + (p_2 - p_3)\right]\left[(\omega_3 - \omega_2) + (\omega_2 - \omega_1)\right]$$
$$> \frac{1}{\rho_0}\left(\sqrt{p_1 - p_2}\sqrt{\omega_2 - \omega_1} + \sqrt{p_2 - p_3}\sqrt{\omega_3 - \omega_2}\right)^2$$

et, sous cette forme, résulte de l'identité bien connue de Lagrange appliquée aux quatre quantités $\sqrt{p_1 - p_2}$, $\sqrt{p_2 - p_3}$, $\sqrt{\omega_2 - \omega_1}$, $\sqrt{\omega_3 - \omega_2}$.

En vertu de cette même identité, l'inégalité n'est remplacée par une égalité que si l'on a

$$\sqrt{p_1 - p_2}\sqrt{\omega_3 - \omega_2} - \sqrt{p_2 - p_3}\sqrt{\omega_2 - \omega_1} = 0,$$

ce qui est la condition pour que les trois points soient en ligne droite.

Notre conclusion est donc démontrée. Elle peut, bien entendu, s'énoncer encore ainsi : *Chacune des longueurs hyperboliques des côtés du triangle à l'exception de la plus grande, est inférieure à la différence des deux autres.*

237. — Ceci étant établi, considérons le triangle $p_0 q_1 p_2$. Dans ce triangle, on a $\overline{q_1 p_0} - \overline{q_1 p_2} = V = \overline{Pp_0}$. Étant données les situations respectives des trois sommets du triangle, ceci montre que le troisième côté $p_2 p_0$ est inférieur à Pp_0, ce qui entraîne bien $p_2 < P$.

238. — L'onde ainsi née par réflexion sur le piston va se propager avec une certaine vitesse, laquelle est certainement supérieure à celle de la discontinuité qui existe entre l'état (q_1, ϖ_1) et l'état primitif de repos. En effet, les vitesses de propagation de ces discontinuités dépendent des coefficients angulaires des cordes joignant les points représentatifs des états entre lesquels elles ont lieu. Dès lors, en raison de la convexité de la courbe (2'), ces vitesses croissent avec les pressions. Or, la pression p_2 est supérieure à p_0.

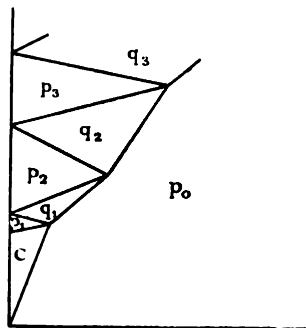


Fig. 16

Dans ces conditions, la nouvelle onde rattrapera assurément la primitive : a et t étant considérées comme des coordonnées planes (ainsi qu'il a été déjà fait à la *fig.* 10), la marche de ces deux ondes sera celle qui est représentée *fig.* 16. En leur point de concours naîtra un nouvel état intermédiaire, caractérisé par une pression q_2, une dilatation ϖ_2 et une vitesse u_2.

$\overline{p_2 p_0}$ étant cette fois inférieur à V, q_2 sera compris entre p_2 et P, et déterminé par la condition

$$\overline{q_2 p_0} + \overline{q_2 p_2} = \text{V}.$$

Soient maintenant p_3 et ω_3 la pression et la dilatation qui prendront naissance par réflexion lorsque l'onde rétrograde (q_2, ϖ_2, u_2) rencontrera le piston. p_3 sera supérieur à q_2 (parce que u_2 est inférieur à V) et l'on aura

$$\overline{q_2 p_3} = \text{V} - u_2,$$

de sorte que $\overline{q_2 p_3}$ est égal à $\overline{q_2 p_2}$ (*fig.* 17).

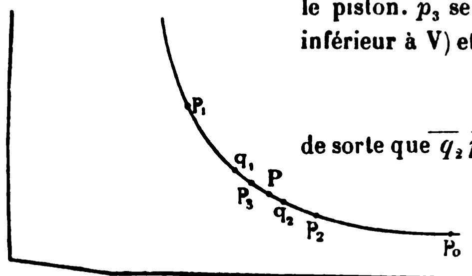


Fig 17

La pression p_3 est supérieure à P. C'est ce que l'on voit dans le triangle $p_0\, q_2\, p_3$, dans lequel le plus grand côté est $\overline{p_0 p_3}$, pendant que la somme des deux autres côtés est égale à $\overline{\text{P}p_0}$.

Dès lors, la même série de phénomènes va recommencer. Pour la même raison que tout à l'heure, l'onde qui propage la nouvelle pression p_3 rejoindra celle qui propage la pression q_2 et, en leur point de rencontre, prendra naissance une nouvelle pression q_3 comprise entre q_1 et P : celle-ci engen-

drera par réflexion sur le piston une pression p_4 comprise entre p_2 et P ; et ainsi de suite.

Les pressions p_1, p_3, ... p_{2n-1} ...., sont supérieures à P et vont en décroissant : elles tendent donc vers une limite, et il en est de même pour q_1, q_3, ... q_{2n-1} ..... Pareillement, p_2, p_4 .... p_{2n} .... vont en croissant et restent inférieurs à P : ils tendent vers une limite ainsi que q_2, q_4, ... q_{2n}, ...

Nous allons enfin constater que ces limites sont toutes quatre égales à P.

En effet, le triangle Pp_1q_1 nous donne d'abord

$$\overline{Pq_1} + \overline{q_1p_1} = \overline{Pq_1} + \overline{q_1p_2} < \overline{Pp_1} ;$$

puis le triangle Pq_2p_3 donne

$$\overline{q_2p_3} - \overline{Pq_2} = \overline{q_2p_2} - \overline{Pq_2} > \overline{Pp_3}.$$

En retranchant membre à membre ces deux inégalités, il vient

$$\overline{Pq_1} + \overline{Pq_2} + \overline{p_2q_1} - \overline{p_2q_2} < \overline{Pp_1} - \overline{Pp_3}.$$

Autrement dit, les quantités $\overline{Pq_1}$, $\overline{Pq_2}$ sont inférieures à la différence $\overline{Pp_1} - \overline{Pp_3}$. D'une manière générale, les quantités $\overline{Pq_{2n-1}}$, $\overline{Pq_{2n+1}}$ sont inférieures à $\overline{Pp_{2n-1}} - \overline{Pp_{2n+1}}$: elles tendent donc vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, d'où résulte que q_{2n-1} et q_{2n} tendent vers P. D'ailleurs la relation

$$\overline{q_ip_{i+1}} = \pm(\overline{Pp_0} - \overline{q_ip_0})$$

montre qu'il en est de même pour p. Or, la pression P est celle qui s'établirait, d'après les considérations du n° **221**, si le piston passait sans transition de la vitesse 0 à la vitesse V. Nous constatons donc, conformément aux vues d'Hugoniot, que cette pression est bien la même qui se produit finalement par le jeu des réflexions successives.

CHAPITRE V

LES MOUVEMENTS DANS L'ESPACE

239. — Après nous être occupés, dans le chapitre précédent, du mouvement d'un gaz en supposant que ce mouvement est exclusivement rectiligne, reprenons les équations du mouvement à trois dimensions, autrement dit, les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{\delta^2 x}{\delta t^2}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{\delta^2 y}{\delta t^2}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{\delta^2 z}{\delta t^2}. \end{cases}$$

Nous avons vu, au chapitre III, qu'entre ces équations et les conditions à la paroi, existait une contradiction apparente. Mais la discussion présentée plus haut dans le cas du mouvement rectiligne nous montre comment cette difficulté doit être éclaircie. L'accord entre les deux séries de conditions est maintenu grâce à la production de discontinuités qui naissent au contact de la paroi et se propagent au sein du fluide. De pareilles ondes prendront naissance chaque fois que les accélérations d'ordre quelconque de la paroi seront différentes de celles qui résulteraient des équations internes du mouvement, et seront d'un ordre égal à celui des accélérations pour lesquelles cette discordance aura lieu. Au cours d'un mouvement quelconque, elles se produiront lorsque l'accélération ou l'une des accélérations d'ordre supérieur de la paroi deviendra discontinue par rapport au temps.

Etudions donc la propagation d'une discontinuité dans le gaz en supposant pour fixer les idées, qu'elle soit du second ordre. La pression étant

supposée fonction de la densité, les équations du mouvement s'écriront encore :

$$(1')\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{d\rho}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial x} = X - \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ \dfrac{dp}{d\rho}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial y} = Y - \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ \dfrac{dp}{d\rho}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial z} = Z - \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{cases}$$

De part et d'autre d'une discontinuité de second ordre, les composantes de l'accélération prendront deux séries de valeurs

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_1, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_1, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_1; \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_2, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_2, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_2$$

et les dérivées de la densité deux séries de valeurs

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1, \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1; \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_2, \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_2.$$

Les unes et les autres satisferont aux équations précédentes. Les composantes de la force étant supposées continues, si l'on retranche membre à membre les unes des autres les relations ainsi obtenues, il viendra

$$\frac{dp}{d\rho}\left[\frac{\partial \log \frac{1}{\rho}}{\partial x}\right] = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{dp}{d\rho}\left[\frac{\partial \log \frac{1}{\rho}}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{dp}{d\rho}\left[\frac{\partial \log \frac{1}{\rho}}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right].$$

Soient λ, μ, ν les composantes de la discontinuité *rapportées à l'état actuel pris comme état initial*; θ, la vitesse de propagation. Les variations des composantes de l'accélération seront, $\lambda\theta^2$, $\mu\theta^2$, $\nu\theta^2$. Celles des dérivées de $\log \frac{1}{\rho}$ seront données par les formules (63) du n° 111 : on aura donc

en désignant toujours par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité S,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha\frac{dp}{d\rho}(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma) &= \lambda\theta^2,\\ \beta\frac{dp}{d\rho}(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma) &= \mu\theta^2,\\ \gamma\frac{dp}{d\rho}(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma) &= \nu\theta^2. \end{aligned}\right.$$

λ, μ, ν ne sont pas nuls simultanément, sans quoi la discontinuité ne serait pas du second ordre, mais du troisième. Si donc θ est différent de 0, il en est de même de l'un au moins des seconds membres des équations précédentes; et l'on voit que ces seconds membres sont proportionnels à α, β, γ.

Ainsi, *dans un gaz, toute discontinuité du second ordre qui se propage est* (**115**) *longitudinale.*

D'autre part, la quantité $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ qui, dans le cas général, représente la projection de la discontinuité sur la normale de la surface d'onde, n'est ici autre que la grandeur même de cette discontinuité; et, en la multipliant successivement par α, β, γ on obtient ses projections sur les axes coordonnés, c'est-à-dire λ, μ, ν. Les équations (**2**) se réduisent donc à

$$(3)\qquad \theta^2 = \frac{dp}{d\rho}:$$

Ainsi, *la vitesse de propagation de la discontinuité rapportée à l'état actuel, a pour valeur* $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$.

240. Si on voulait avoir la vitesse de propagation θ_0 rapportée à un état initial quelconque (a, b, c), il faudrait diviser θ par la dilatation normale à l'onde, dans le passage de cet état à l'état actuel. En désignant par $\varphi(da, db, dc)$ la forme quadratique introduite au n° **51** et par Φ la forme adjointe de φ, par ρ_0 la densité de l'état initial, on aurait [1]

$$(4)\qquad \theta_0^2 = \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\frac{dp}{d\rho}\frac{\Phi(f_a, f_b, f_c)}{f_a^2+f_b^2+f_c^2}.$$

---

[1] Voir la note de la page 92.

Quant à la vitesse de déplacement T, comme elle est liée à θ par l'équation (**54**) du n° **100**, on a

$$(5) \qquad T = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} + u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

u, v, w étant les composantes de la vitesse.

241. — Il nous reste à examiner l'hypothèse $\theta = 0$. Les équations (**2**) donnent alors $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$. Autrement dit, *la discontinuité est transversale.*

Un gaz pourra donc offrir : 1° des discontinuités longitudinales se propageant avec la vitesse $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$; 2° des discontinuités transversales stationnaires.

242. — Nous avons supposé, pour fixer les idées, la discontinuité du second ordre. Mais les résultats que nous venons d'obtenir subsistent en ce qu'ils ont d'essentiel pour un ordre n supérieur à 2. Supposons, en effet, — ce que nous avons évidemment le droit de faire —, α différent de 0 ; et différencions les équations (**1'**) $n-2$ fois par rapport à x. Les termes contenant les dérivées partielles d'ordre n seront seuls affectés par la discontinuité. Or, au second membre, ces termes proviennent exclusivement de la différenciation de $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$; et, au premier, il faut, pour en obtenir, faire porter tout le poids de la différenciation sur les facteurs $\frac{\partial \log \rho}{\partial x}, \frac{\partial \log \rho}{\partial y}, \frac{\partial \log \rho}{\partial z}$. Dans ces conditions, et si l'on a égard aux formules (**57**), (**57'**, **63**) du chap. II, on voit que les équations auxquelles on parvient ne sont autres que les relations (**2**), les deux membres de chaque équation étant simplement multipliés par α^{n-2}. Donc, comme précédemment, nous pourrons avoir, d'une part, des discontinuités longitudinales se propageant avec la vitesse $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$; d'autre part, les discontinuités transversales stationnaires.

Ainsi que l'a remarqué Hugoniot, il en est encore de même dans des conditions un peu plus générales. Nous avons vu plus haut que, dans certains cas, p pouvait être fonction non seulement de ρ mais encore de a, b, c : C'est ce qui se produit, par exemple, lorsqu'à aucun moment le gaz n'a été homogène, ou lorsqu'il s'y est produit des ondes du premier ordre.

ie deviendront, dans ces conditions, les équations (1') ? On voit édiatement (en se reportant aux équations (1)) qu'elles seront modi- respectivement par l'addition des termes [1]

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right), \ldots\ldots$$

', ceux-ci ne contiennent que des dérivées du premier ordre de x, y, z rapport à a, b, c, t et, par suite, n'éprouveront aucune discontinuité. ›nc, les formules (2) subsisteront, la quantité $\frac{dp}{d\rho}$ étant, bien entendu, ›lacée par la dérivée *partielle* de p par rapport à ρ. Cette dérivée don- donc encore le carré de la vitesse de propagation.

en serait encore de même si les forces X, Y, Z dépendaient de la den- 'à l'exclusion de ses dérivées) ou contenaient d'une façon quelconque érivées premières de x, y, z.

13. — Nous venons de voir que la vitesse de propagation s'exprime ıne racine carrée et est par conséquent, susceptible d'un double signe. mble donc au premier abord qu'à un instant quelconque le sens de propagation soit indéterminé.

est cependant à peu près évident *a priori* que ce sens ne saurait être à fait quelconque, qu'il ne saurait, par exemple, changer brusquement ›urs du mouvement. En fait, il est aisé de voir que, pour une discon- ité donnée, θ *a un signe parfaitement déterminé*. Cette quantité doit fet, satisfaire non seulement à l'équation (3), mais aux conditions de patibilité

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\delta^2 x}{\delta a\,\delta t}\right] = -\lambda\alpha\theta, \quad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta b\,\delta t}\right] = -\lambda\beta\theta, \quad \left[\frac{\delta^2 x}{\delta c\,\delta t}\right] = -\lambda\gamma\theta \\ \left[\frac{\delta^2 y}{\delta a\,\delta t}\right] = -\mu\alpha\theta, \ldots\ldots \quad \left[\frac{\delta^2 z}{\delta c\,\delta t}\right] = -\nu\gamma\theta\end{array}\right.$$

° **103**. Dans ces dernières, il est la seule inconnue et est, par suite, ıé sans ambiguité, puisqu'il y figure au premier degré.

14. — Si l'on n'avait pas les équations (6) ainsi que (2), (3), c'est

---

[1] Dans ces termes les dérivées $\frac{\partial p}{\partial a}$, $\frac{\partial p}{\partial b}$, $\frac{\partial p}{\partial c}$ sont déduites de l'équation qui donne p ıction de ρ, a, b, c considérés comme quatre variables indépendantes.

qu'il n'y aurait pas compatibilité. Nous savons alors que la discontinuité ne pourrait pas rester unique et nous pouvons nous proposer d'étudier ce qui se produira dans ces conditions. Mais avant de procéder à cette recherche, nous avons à parler du cas des liquides.

Pour ceux-ci, ainsi que nous l'avons remarqué précédemment (n° 1[illegible]), il ne peut y avoir de discontinuité normale, ni même de discontinuité ayant une composante normale, puisque celle-ci influerait sur les dérivées de la densité.

Nous allons voir, d'autre part, qu'une discontinuité normale pourrait seule se propager. Nous pouvons même énoncer ce résultat sous la forme générale suivante :

Dans un milieu en mouvement, si les composantes de l'accélération sont égales, à des quantités continues près, aux dérivées partielles (par rapport aux coordonnées actuelles) d'une même quantité partout continue Φ, il ne peut se propager que des discontinuités (du second ordre) normales.

En effet, les variations des composantes de l'accélération sont $\lambda\theta^2$, $\mu\theta^2$, [illegible], et doivent être égales aux variations de $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$. Or, celles-ci, puisque Φ est supposé continu, doivent être, d'après le lemme du n° 73, proportionnelles à α, β, γ. Il en est donc de même de λ, μ, ν si θ est différent de [illegible].

On voit donc que *le saut d'accélération est normal*, et ce résultat est obtenu *sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir la compatibilité*, ni aucune hypothèse autre que la continuité de Φ à l'instant considéré.

Si maintenant nous admettons qu'il y a compatibilité, avec une vitesse de propagation différente de zéro, nous savons que la direction du saut d'accélération est aussi celle du segment caratéristique (λ, μ, ν).

Le lemme que nous venons de démontrer s'applique immédiatement au cas qui nous occupe, la quantité Φ étant ici $\frac{p}{\rho}$, en vertu des équations [illegible].

On remarquera que même s'il n'y a pas compatibilité ou même si la discontinuité est du premier ordre et non du second, sous la seule condition de supposer la pression partout continue, le raisonnement précédent montre que la *variation brusque d'accélération est un segment normal à l'onde.*

215. — Il est aisé de généraliser à une discontinuité d'un ordre quelconque n. Dans ce cas la variation de l'accélération d'ordre n dépend (¹) de

(¹) On n'a pas [illegible], mais la différence de ces deux expressions [illegible]

celles des dérivées de $\frac{\delta^{n-2}p}{\delta t^{n-2}}$. Or, les dérivées $(n-2)^{\text{èmes}}$ de p par rapport à x, y, z, pouvant s'exprimer en fonction des dérivées d'ordre $n-1$ des coordonnées, sont continues dans l'hypothèse actuelle et il en est de même pour les autres dérivées $(n-2)^{\text{èmes}}$ de p, en vertu de la proposition fondamentale du n° **97**. On peut donc appliquer à $\frac{\delta^{n-2}p}{\delta t^{n-2}}$ le lemme précédent, et déduire de là que la variation d'accélération d'ordre n est un segment normal à l'onde.

246. — Si maintenant on fait intervenir les conditions de compatibilité, on voit que la composante tangentielle de la discontinuité, et, par conséquent, celle-ci tout entière sont nulles s'il y a propagation.

Il est donc établi que le mouvement d'un liquide ne peut présenter que des discontinuités à la fois stationnaires et tangentielles.

247. — Le lemme qui vient d'être utilisé est d'ailleurs également pplicable aux gaz, en prenant pour Φ la quantité $\int \frac{dp}{\rho}$, qui est une fonction de p. Le fait, précédemment constaté, que toute discontinuité qui se propage dans un gaz est normale, est donc, comme on le voit, une conséquence de celui-ci, que les accélérations dérivent d'un potentiel.

248. — Reprenons maintenant, comme au chap. III, un liquide dans lequel on donne les positions et les vitesses des différentes molécules, et supposons que ces données présentent, le long d'une certaine surface S, une discontinuité du second ordre, laquelle sera, par conséquent, connue en chaque point en ce qui concerne les dérivées d'indice zéro $\frac{\delta^2 x}{\delta a^2}$, ... et les dérivées d'indice un $\frac{\delta^2 x}{\delta a\, \delta t}$, ... Nous ne supposons d'ailleurs pas que les conditions de compatibilité soient vérifiées. Mais, par contre, les conditions identiques le sont nécessairement, puisque la discontinuité est du second ordre tout le long de S. Nous aurons donc en chaque point de celle-ci deux segments donnés, dont les directions ne sont pas nécessaire-

(comme on le voit en exprimant le symbole $\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta} t}$ en fonction de $\frac{\delta}{\delta t}$ et développant) ne comprend que les dérivées des coordonnées jusqu'à l'ordre $n-1$ et les dérivées de la pression jusqu'à l'ordre $n-2$, toutes quantités continues dans nos hypothèses.

ment les mêmes. Quelles seront, dans ces conditions, les discontinuités éprouvées par $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$?

Nous nous placerons d'ailleurs, pour répondre à cette question, dans l'hypothèse où il ne se creuse pas de cavités à l'intérieur du fluide et où, par conséquent, les deux régions situées de part et d'autre de S restent forcément contigues l'une à l'autre pendant toute la durée du mouvement.

La question se simplifie notablement en raison des propriétés physiques particulières aux fluides. Ceux-ci ne conservent en effet aucune trace de leur état initial, si ce n'est que la densité ne cesse pas d'être donnée par l'équation (3') du n° 17.

Dès lors, la restriction apportée au choix de l'état initial au n° 15bis cesse d'être nécessaire : on peut indifféremment substituer l'un à l'autre deux états initiaux tels que les dérivées des coordonnées de l'un par rapport aux coordonnées de l'autre présentent des discontinuités ou des singularités quelconques pourvu que le déterminant fonctionnel des anciennes coordonnées par rapport aux nouvelles soit continu ainsi que ses dérivées.

Or, dans le cas actuel, les positions données des molécules doivent évidemment être choisies telles que la densité soit constante.

Donc, quoiqu'il y ait discontinuité, nous pouvons prendre, pour tout le fluide, l'état actuel comme état initial et, par conséquent, annuler le segment qui correspond aux dérivées d'indice zéro.

Pour voir ce que sera, dans ces conditions, le segment (λ_1, μ_1, ν_1) qui correspond aux dérivées d'indice un, nous devons nous rappeler que les vitesses sont nécessairement choisies telles que la dérivée de la densité par rapport au temps soit partout nulle. Si alors nous nous reportons au calcul de la variation de cette dérivée, *tel qu'il a été fait au n° 111*^{bis} (les considérations du n° 111 ne peuvent être invoquées ici, puisqu'il n'y a pas compatibilité) nous voyons que le segment (λ_1, μ_1, ν_1) doit être tangent à la surface S.

Quant à l'accélération, *elle n'éprouvera aucune discontinuité* (si l'on écarte toujours le cas où le fluide se creuserait de cavités). En effet, nous avons vu précédemment (n° 211) qu'en vertu des équations du mouvement, une telle discontinuité devrait être normale et, d'autre part, nous savons qu'elle devrait être tangentielle, sans quoi, elle ne saurait subsister qu'en se propageant, ce qui est impossible.

219. Mais on peut aller plus loin et affirmer, non seulement que les accélérations de tous les ordres sont continues, mais encore que la discon-

tinuité donnée ne donne lieu, dans la suite du mouvement, à aucune discontinuité absolue.

Pour le voir, rappelons-nous les considérations du n° **244**, d'où résulte que le saut d'accélération, dans la discontinuité considérée, est nécessairement normal. Cette conclusion subsiste *lors même qu'il y a saut de vitesse.*

Soient alors ξ', η' des coordonnées curvilignes sur la surface de discontinuité, coordonnées qui définissent une molécule quelconque de cette surface appartenant à la région 2 ; ξ, η les coordonnées curvilignes, à l'instant t_0 de la molécule de la région 1 qui, à l'instant t, coïncide avec la molécule (ξ', η') de la région 2. Pour ξ', η' données, ξ et η sont des fonctions de t. La condition que le saut d'accélération soit normal donne, pour ces fonctions, deux équations différentielles du second ordre, lesquelles sont évidemment vérifiées lorsque ξ et η sont constants [1]. C'est, dès lors, nécessairement, cette dernière circonstance qui se produira si, à un instant déterminé, les deux dérivées $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont nulles : ce que nous voulions établir.

250. — Il est aisé de vérifier, sur des exemples simples de discontinuités portant sur les tourbillons, c'est-à-dire de discontinuités transversales portant sur les dérivées de la forme $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$, ... l'existence d'un mouvement sans discontinuité absolue.

Prenons, par exemple, un mouvement à deux dimensions défini par la double condition : 1° de se réduire, dans tout le volume d'un certain cylindre de révolution C dont l'axe est vertical, à une rotation uniforme autour de cet axe ; 2° d'avoir une rotation moléculaire nulle dans tout l'espace restant. Les méthodes connues de l'Hydrodynamique montrent que, dans ces conditions, il existe un potentiel des vitesses égal à k arc tg $\frac{y}{x}$, k étant une constante et l'axe des z étant l'axe de C. La vitesse sera alors perpendiculaire au plan mené par le point (x, y) et l'axe, et inversement proportionnelle à la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Chaque point extérieur à C décrira donc une circonférence et tournera, pendant un temps t, d'un angle égal à $\frac{k}{r^2}\, t$.

---

[1] Voir la note III à la fin du volume.

De plus, la vitesse devant être continue à l'origine du mouvement, la constante k aura dû être calculée de manière à ce que, à la surface du cylindre, la vitesse angulaire soit la même que celle des points intérieurs.

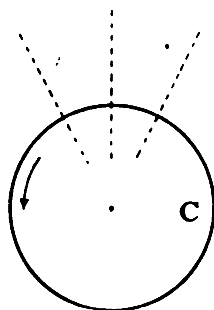
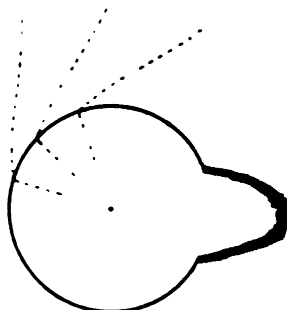


Fig. 18

Dans ces conditions, il est clair que les points intérieurs et extérieurs qui seront en contact les uns avec les autres seront les mêmes à tout instant.

Par contre, la surface du cylindre sera évidemment le siège d'une discontinuité du premier ordre portant sur les dérivées $\frac{\delta x}{\delta a}$, ... Seulement, cette discontinuité ne serait pas physiquement appréciable. Elle n'existerait pas à un instant quelconque, considéré en lui-même, mais serait uniquement relative aux positions à deux instants différents comparées les unes aux autres. Autrement dit, une ligne à tangente continue, telle que celles qui sont représentées sur la *fig.* 18, traversant la surface du cylindre serait remplacée, aux instants suivants par une ligne ayant l'allure représentée sur la *fig.* 18 bis.

L'existence d'une discontinuité de cette espèce résulte bien, dans le cas général, des considérations qui précèdent : nous savons (n° 93) qu'une discontinuité stationnaire du second ordre affectant les dérivées d'indice un donne naissance à une discontinuité du premier ordre portant sur les dérivées d'indice zéro.


Fig. 18 bis

251. — Revenons maintenant au cas des gaz. Soient encore données les positions et les vitesses des molécules avec une discontinuité du second ordre en tous les points d'une surface S, les conditions identiques étant vérifiées, mais non les conditions de compatibilité. Il existera donc, en chacun de ces points, deux segments (λ, μ, ν) et $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ correspondant respectivement aux dérivées d'indice zéro et d'indice un.

Plaçons-nous d'abord dans un cas particulier, celui où ces segments sont tous deux normaux à S. Alors on peut déterminer deux discontinuités normales se propageant, l'une avec la vitesse θ donnée par la formule 3, l'autre avec la vitesse $-\theta$, dont la superposition produit la discontinuité donnée.

Soient, en effet, l et l les grandeurs de ces deux discontinuités; h et k les grandeurs des segments donnés, (λ, μ, ν) et $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ comptés comme

ou comme négatives suivant leur sens. Il est clair qu'on devra

$$\begin{cases} h = l + l' \\ k = (l' - l)\,\theta \end{cases}$$

èciproquement, si ces deux conditions sont vérifiées, les ondes de l et l' sont bien celles que nous cherchons.

deux équations précédentes sont évidemment toujours résolubles ›rt à l et l'.

Pour traiter le cas général, il suffit de combiner ce que nous venons vec les résultats obtenus dans le cas des liquides.

ommes libres de prendre l'état initial que nous voudrons, pourvu nsité et ses dérivées y soient continues. Nous pourrons dès lors, t coïncider cet état initial avec l'état actuel dans la région 1, le ıns le région 2 de la façon suivante :

érons chaque point M de la région 2 comme défini par sa distance $Mm = \delta$ à S et par la position du point m. Sur la même normale ons une nouvelle distance $Mm_0 = \delta_0$. Nous pourrons évidemment ›tte dernière en fonction de la première et de la position de m, de que, si l'on imagine chaque molécule de la région 2 transportée osition véritable M à la position M_0 correspondante, la densité continue ainsi que toutes ses dérivées. C'est l'état fictif ainsi ue nous prendrons pour état initial. Il est clair qu'alors le segment sera normal à la surface de discontinuité.

pourrons, d'autre part, décomposer le segment $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ en sa ›rmale et sa partie tangentielle. Si nous faisons d'abord abstraction dernière, nous serons ramenés au cas que nous venons d'étudier, :rouverons deux feuillets de discontinuité se propageant en sens avec la vitesse θ.

ira, dès lors, d'adjoindre à ces deux ondes la discontinuité produite ›mposante tangentielle du segment $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$. Celle-ci est forcéıtionnaire. On pourra lui appliquer sans modification les raisonne-·ésentés dans le cas des liquides. Les accélérations de tous ordres t donc continues lorsqu'il ne subsistera plus que cette troisième ıuité : le résultat produit sera une déformation du premier ordre des régions par rapport à l'autre, ainsi qu'il a été expliqué tout à

253. — C'est d'une manière tout analogue que l'on déterminera l'état qui prend naissance au contact de la paroi lorsque l'accélération normale de celle-ci sera en discordance avec celle qui résulterait des équations internes du mouvement, comme nous l'avons expliqué aux nos **139-140**. Nous aurons alors à faire intervenir une discontinuité normale se propageant avec la vitesse $\theta = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ vers l'intérieur du fluide. La grandeur l de cette discontinuité sera déterminée par la condition que $l\theta^2$ soit égal à la différence des deux valeurs de l'accélération normale. l étant ainsi calculé, on n'aura plus qu'à appliquer les formules du ch. II pour obtenir les dérivées du second ordre au contact de la paroi, puisqu'on connait ces mêmes valeurs avant la naissance de la discontinuité.

254. — Les résultats les plus importants qui aient été obtenus jusqu'ici en Hydrodynamique sont, comme on sait, relatifs à la conservation des tourbillons et, par conséquent, à celle du potentiel des vitesses, lorsqu'il existe.

Or, les composantes du tourbillon sont formées avec les dérivées partielles du second ordre de x, y, z par rapport à a, b, c, t. On doit donc se demander si les théorèmes qui les concernent ne sont pas mis en défaut lors du passage de nos discontinuités.

La réponse est négative ; elle résulte immédiatement de ce que les discontinuités hydrodynamiques sont normales. Comme telles, elles n'affecteront pas la rotation moléculaire, dont la variation est proportionnelle (n° **111**) à la composante tangentielle de la discontinuité.

255. — Au reste, le même fait se reconnait ([1]) par la considération de l'intégrale $\int u dx + v dy + w dz$ ou *circulation*, qui fournit, comme on le sait ([2]), la démonstration la plus simple des théorèmes, dont nous parlons, ceux-ci revenant à la conservation de cette intégrale au cours du mouvement, lorsqu'elle est prise suivant un contour fermé C.

([1]) Nous nous contenterons d'indiquer sommairement la marche de ce raisonnement tout analogue à celui qui sera exposé plus loin, dans la note III à la fin du volume.

([2]) Thomson, *Cambridge Trans.*, 1869 ; Basset, *Hydrodynamique*, t. I, p. 70-73 ; Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. I, p. 108-115 ; Poincaré, *Théorie des Tourbillons*, ch. I ; Appell, *Traité de Mécanique*, t. III, ch. xxxv, etc.

La question est donc de savoir si l'intégrale en question, qui garde nécessairement la même valeur tant que le contour C reste dans une région où le mouvement est bien continu, peut en changer lorsque ce contour est traversé par une onde.

Or, pendant un intervalle de temps dt, l'influence d'une discontinuité ne s'exerce que sur les arcs s de C compris entre les deux positions occupées par l'onde au commencement et à la fin de cet intervalle : arcs dont la longueur est de l'ordre de dt. D'autre part, si l'on écrit l'intégrale sous la forme

$$(8) \qquad \int \left(u \frac{dx}{d\tau} + v \frac{dy}{d\tau} + w \frac{dz}{d\tau}\right) d\tau,$$

(τ étant un paramètre qui définit une molécule déterminée de la ligne C) l'expression $u \frac{dx}{d\tau} + v \frac{dy}{d\tau} + w \frac{dz}{d\tau}$ ne variera pas brusquement sur l'onde, puisque celle-ci est du second ordre. La quantité dont elle sera modifiée par la discontinuité, en un point quelconque d'un des arcs s, sera donc de l'ordre de cet arc lui-même, et l'altération correspondante de l'intégrale (**8**), de l'ordre de s^2, c'est-à-dire de dt^2. Donc la dérivée de cette intégrale sera nulle, comme quand le mouvement était continu.

On peut s'étonner du succès de ce raisonnement, étant donné qu'il ne fait point intervenir la direction de la discontinuité, et que, d'après le n° précédent le résultat actuel cesserait évidemment d'être vrai si celle-ci n'était pas normale. Mais il faut observer que (n° **247**) l'orthogonalité qui existe entre la direction de la discontinuité et celle de la surface d'onde revient à l'existence d'un potentiel des accélérations, laquelle a été utilisée lorsqu'on a établi la conservation des tourbillons dans le mouvement continu.

256. — Outre les ondes d'accélération, il peut se produire comme nous l'avons vu, des ondes du premier ordre, ou *ondes de choc*. Nous avons même constaté que de telles ondes peuvent naître lors même que la vitesse de la paroi ne présenterait aucune variation brusque. Il est aisé d'établir, pour la propagation de telles ondes, des équations tout analogues à celles que nous avons écrites aux n°s **205-209** dans le cas du mouvement rectiligne.

Soit (λ, μ, ν) le segment caractéristique de la discontinuité, l'état initial étant celui de la région 1 : la variation brusque de la vitesse sera ($-\lambda\theta$, $-\mu\theta$, $-\nu\theta$). Soit, d'autre part, $[p] = p_2 - p_1$ la variation de pression.

Appliquons le théorème des quantités de mouvement projetées à un petit cylindre compris entre une portion S de la surface d'onde au temps t et la portion correspondante de la surface d'onde à l'instant infiniment voisin $t + dt$. Ce cylindre étant considéré dans l'état 1 du milieu, sa hauteur sera

$$dn = \theta dt$$

et sa masse

$$\rho_1 \theta S dt$$

Nous supposerons S très petit, mais cependant dt négligeable par rapport aux dimensions de S. Grâce à cette circonstance, nous pourrons négliger les pressions agissant sur la surface latérale de notre cylindre par rapport à celles qui agissent sur les bases. L'effet des forces X, Y, Z serait également négligeable, comme nous l'avons vu au n° **205**. Si donc α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à l'onde, lesquels ne varient pas brusquement, il restera, puisque notre cylindre passe (1), pendant le temps dt, de la région 2 à la région 1 et, par conséquent, de la vitesse ($u_1 - \lambda\theta$, $v_1 - \mu\theta$, $w_1 - \nu\theta$) à la vitesse (u_1, v_1, w_1) sous l'action des pressions normales opposées p_1 et p_2,

$$\begin{aligned}
\rho_1 \theta S dt . \lambda\theta &= - \alpha [p] S dt, \\
\rho_1 \theta S dt . \mu\theta &= - \beta [p] S dt, \\
\rho_1 \theta S dt . \nu\theta &= - \gamma [p] S dt.
\end{aligned}$$

Ceci nous montre tout d'abord que la discontinuité est nécessairement normale. Sa grandeur l est

$$l = - \frac{[p]}{\rho_1 \theta^2}. \tag{9}$$

Le rapport des densités est donné par la formule (60) du n° **109**. Si nous tenons compte de ce que la discontinuité est normale et de grandeur l, il vient

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 = l. \tag{10}$$

On peut éliminer l entre ces deux équations et on obtient

$$[p] = \rho_1 \theta^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \theta^2 (\rho_2 - \rho_1). \tag{11}$$

(1) Comme au n° **205**, nous supposons, dans le raisonnement, θ positif, le résultat final étant, bien entendu, indépendant de cette hypothèse.

Cette formule correspond à l'expression (**68**) obtenue au n° **207** pour la vitesse de propagation. Elle a toutefois une forme un peu différente en raison de ce que nous prenons pour état initial l'état actuel de la région 1, ce que nous n'avions pas fait dans le cas du mouvement rectiligne.

257. Nous avons encore à écrire l'équation d'adiabaticité. Si nous adoptions la loi de Poisson, cette condition serait simplement

$$\frac{p_1}{\rho_1{}^m} = \frac{p_2}{\rho_2{}^m}$$

p_1 et p_2 étant les deux pressions.

Si, au contraire, nous suivons la voie indiquée par Hugoniot, nous aurons à écrire directement que la différence entre le travail total des pressions, lequel, évalué comme nous l'avons fait au n° **209**, a l'expression

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T} &= p_1 (u_1 \alpha + v_1 \beta + w_1 \gamma) - p_2 \left[(u_1 - \lambda\theta)\alpha + (v_1 - \mu\theta)\beta + (w_1 - \nu\theta)\gamma \right] \\ &= p_2 l\theta - [p] (u_1 \alpha + v_1 \beta + w_1 \gamma) \end{aligned}$$

et la variation brusque de force vive est égale à la variation d'énergie interne. Or, cette énergie, qui est, au facteur $\frac{1}{m-1}$ près, le produit du volume par la pression a, dans l'état 1, la valeur $\frac{\theta p_1}{m-1}$ Sdt et, dans l'état 2, où le volume est multiplié par $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, la valeur $\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\theta p_2}{m-1}$ Sdt.

Nous aurons donc (en supprimant le facteur Sdt)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & p_2 l\theta - [p](u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma) + \frac{\rho_1\theta}{2} \left[(u^2 + v^2 + w^2) \right] \\ & \qquad = \frac{\theta}{m-1} \left(p_1 - p_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \end{aligned} \right.$$

Comme au n° **209** nous aurons à transformer cette équation de manière à la rendre indépendante du mouvement absolu du fluide. A cet effet, nous n'aurons qu'à utiliser les équations précédemment obtenues

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - l\alpha\theta, \\ v_2 &= v_1 - l\beta\theta, \\ w_2 &= w_1 - l\gamma\theta, \end{aligned}$$

(où, u_1, v_1, w_1 ; u_2, v_2, w_2 sont les deux vitesses) qui nous donneront la variation de force vive par unité de masse $\left[(u^2 + v^2 + w^2) \right]$.

L'équation (**12**) devient ainsi

$$p_2 l\theta - [p](u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma) + \frac{\rho_1\theta}{2}\{l^2\theta^2 - 2l\theta(u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma)\}$$

$$= \frac{\theta}{m-1}\left(p_1 - p_2\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

et l'on voit bien alors que les termes en $u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma$ s'éliminent en vertu de (**9**). Il reste (en divisant par θ, puis éliminant l et θ^2 par le moyen des équations (**9**) et (**10**))

$$\text{(18)} \qquad \frac{p_1 + p_2}{2}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{m-1}(p_1\rho_2 - p_2\rho_1)$$

c'est-à-dire l'équation même que nous avions obtenue, pour le cas du mouvement rectiligne, au n° **209** (les quantités ω_1 et ω_2 qui figurent en cet endroit étant inversement proportionnelles à ρ_1 et à ρ_2).

258. — La démonstration du n° **254**, d'après laquelle les ondes d'accélération n'altèrent pas le mouvement tourbillonnaire, ne s'applique pas aux ondes de choc. Au contraire, en modifiant convenablement le raisonnement du n° **255**, on peut démontrer [1] que celles-ci sont capables de faire naître des tourbillons là où il n'en existait pas avant leur passage.

---

(1) Voir la note III à la fin du volume.

CHAPITRE VI

—

APPLICATION A LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

259. — Nous allons, dans ce chapitre, nous proposer d'étudier la propagation des ondes non plus dans les liquides, mais dans les solides élastiques. Contrairement à ce qui se passait pour les liquides, il y a lieu, pour cette étude, de prendre pour état initial non plus l'état actuel, mais un état parfaitement déterminé, dit *état naturel*, du corps considéré. L'état initial étant ainsi choisi, les tensions internes sont des fonctions des *composantes de déformation* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ définies au n° **51**.

La distinction entre l'état initial et l'état actuel n'a d'ailleurs pas à intervenir dans le cas le plus simple que l'on ait à étudier, celui où l'on suppose : 1° que le corps considéré est homogène et isotrope ; 2° que les déformations qu'il subit sont infiniment petites.

Dans ce cas, les coordonnées a, b, c de l'état initial (c'est-à-dire de l'état naturel), coïncident sensiblement avec les coordonnées x, y, z de l'état actuel : on a

$$x = a + \xi,$$
$$y = b + \eta,$$
$$z = c + \zeta,$$

ξ, η, ζ étant supposés très petits ainsi que leurs dérivées. Réduites aux termes infiniment petits du premier ordre, les composantes de déformation seront

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}, \ \varepsilon_2 = \dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \ \varepsilon_3 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}, \ \gamma_2 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}, \ \gamma_3 = \dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}. \end{cases}$$

Les équations du mouvement se déduisent, comme nous aurons l'occa-

sion de le rappeler un peu plus loin, de la considération d'une certaine fonction des composantes de déformation appelée *énergie élastique*. Dans le cas de l'isotropie où nous nous plaçons maintenant, cette quantité a une expression de la forme

$$(2) \qquad \iiint W\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$(2') \left\{ \begin{aligned} 2\rho W &= L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + M(2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \\ &= (L + 2M)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + M(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4\varepsilon_2\varepsilon_3 - 4\varepsilon_3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2) \end{aligned} \right.$$

où L et M sont deux constantes (¹) telles que la forme quadratique W soit définie positive, c'est-à-dire assujetties aux inégalités

$$(3) \qquad M > 0, \quad 3L + 2M > 0.$$

Les équations du mouvement s'écrivent

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= M\Delta\xi + (L + M)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho X, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= M\Delta\eta + (L + M)\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \rho Y, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= M\Delta\zeta + (L + M)\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho Z, \end{aligned} \right.$$

σ étant l'expression

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

telle que $1 + \sigma$ représente la dilatation $\frac{\rho_0}{\rho}$, et X, Y, Z les forces données rapportées à l'unité de masse.

200. — Les équations (4) sont, comme on voit, du second ordre en ξ, η, ζ ; elles font connaître les composantes de l'accélération dès que ξ, η, ζ sont donnés pour chaque valeur de a, b, c, c'est-à-dire dès qu'on donne les positions des molécules.

Or l'expérience nous enseigne que, pour déterminer le mouvement d'un corps élastique, on doit se donner non seulement les positions et les vitesses des molécules à un instant donné, mais en outre une série de conditions

(¹) Nous désignons par L, M les coefficients que l'on nomme habituellement λ, μ, ces dernières lettres étant employées ici avec une autre signification.

aux limites, telles que les mouvements des différents points de la surface du corps à tout instant, ou les pressions qui s'exercent à chaque instant sur cette surface.

Dans ces conditions, nous rencontrons exactement la même difficulté que dans le problème de l'Hydrodynamique.

Plaçons-nous, par exemple, dans l'hypothèse où l'on donne le mouvement de chacun des points de la surface. Nous connaîtrons dès lors, les accélérations de ces points, et les valeurs trouvées pour ces accélérations sont entièrement indépendantes des équations internes : il n'y aura donc aucune raison pour qu'elles concordent avec celles qui résultent de ces équations. La contradiction est même plus complète que précédemment, puisque ce sont les valeurs mêmes des accélérations, et non plus seulement leurs composantes normales, qui sont données par les conditions aux limites.

Comme dans le cas de l'Hydrodynamique, la solution de cette difficulté doit être cherchée dans la production de discontinuités du second ordre qui naissent à la surface limite et se propagent dans l'intérieur du corps : c'est cette propagation que nous allons étudier.

L'état actuel coïncidant sensiblement avec l'état initial, soient λ, μ, ν les composantes de la discontinité rapportée à l'un quelconque de ces deux états ; θ la vitesse de propagation, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface d'onde. Si, dans les équations (**4**), nous remplaçons les variations brusques des dérivées du second ordre par leurs valeurs tirées des formules du n° **103**, il viendra

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\lambda\theta^2 &= M\lambda + (L+M)\,\alpha(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)\\ \rho\mu\theta^2 &= M\mu + (L+M)\,\beta(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)\\ \rho\nu\theta^2 &= M\nu + (L+M)\,\gamma(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma).\end{aligned}\right.$$

Si nous écrivons ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} (\rho\theta^2 - M)\,\lambda &= (L+M)\,\alpha(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)\\ (\rho\theta^2 - M)\,\mu &= (L+M)\,\beta(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)\\ (\rho\theta^2 - M)\,\nu &= (L+M)\,\gamma(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma),\end{aligned}$$

nous voyons qu'elles sont entièrement semblables aux équations (**2'**) du chapitre précédent. Par conséquent, d'après ce qui a été dit en cet endroit, elles admettront deux sortes de solutions :

1° $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\mu}{\beta} = \frac{\nu}{\gamma}$: la discontinuité est *longitudinale*. Sa vitesse de propagation sera donnée par la relation $\rho\theta^2 - M = L + M$, soit

$$(6)\qquad \theta^2 = \frac{2M+L}{\rho}.$$

2° $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$: la discontinuité est *transversale*. Sa vitesse de propagation sera donnée par la relation $\rho\theta^2 - M = 0$, soit

$$\theta^2 = \frac{M}{\rho}. \tag{7}$$

Les deux valeurs de θ ainsi obtenues sont d'ailleurs réelles en vertu des inégalités (3).

Ainsi, les corps solides isotropes sont susceptibles de propager, avec des vitesses différentes, deux séries d'ondes : les unes sont exclusivement longitudinales, les autres exclusivement transversales. Ainsi que nous l'avons vu au n° **115**, les premières ne s'accompagnent d'aucune variation de la rotation moléculaire instantanée ; les secondes, d'aucune variation des dérivées de la densité.

201. — Si, à un instant déterminé, il existe, entre les accélérations de la surface déduites des équations internes et ces mêmes accélérations déduites des conditions aux limites, une différence quelconque, celle-ci donnera lieu à deux ondes, l'une longitudinale, l'autre transversale, correspondant respectivement à la composante normale et à la composante tangentielle du segment qui représente cette différence.

Si, d'autre part, dans l'intérieur du milieu, existait à un moment déterminé une discontinuité du second ordre le long d'une surface déterminée et que cette discontinuité fût absolument quelconque (sous la seule restriction des conditions identiques) elle donnerait naissance à *quatre* ondes, les unes longitudinales, les autres transversales, se propageant les unes dans un sens, les autres en sens contraire.

202. — Si, au lieu de se donner les positions des points de la surface, on se donnait à chaque instant les tensions qui sollicitent ces points, celles-ci pourraient également, à l'instant initial, avoir des valeurs différentes de celles qu'on déduit des valeurs connues des composantes de déformation en ces mêmes points. Dans ces conditions, il se produirait également une onde ; mais elle serait, cette fois, du premier ordre, car une différence finie de la pression interne avec la pression externe produit une variation brusque de vitesse. De telles ondes ont été étudiées par Christoffel [1]. Grâce à l'hypothèse que les mouvements sont infiniment petits, ce savant obtient

[1] *Annali di Matematica*, serie II, tome VIII, p. 193 ; 1877.

d'ailleurs des résultats identiques, au fond, à ceux que fournit l'étude des ondes d'accélération.

263. — On forme aisément, dans les traités d'Elasticité, les équations du mouvement pour le cas des corps anisotropes. Nous ne développerons pas, pour ces corps, les résultats correspondant à ceux qui précèdent : nous allons, en effet, les retrouver dans le cas plus général de la déformation finie. Rappelons seulement que W est encore une forme quadratique en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et que les équations (**4**) sont remplacées par trois équations du second ordre qui donnent encore les projections de l'accélération en fonction des dérivées secondes (et aussi des dérivées premières, si le corps n'est pas homogène) de ξ, η, ζ par rapport à x, y, z.

Lorsqu'on cherche, en optique, les états vibratoires satisfaisant aux équations ainsi écrites, on constate qu'*à toute direction d'onde plane correspondent trois directions de vibration, lesquelles sont rectangulaires entre elles et sont les directions principales d'une certaine quadrique* dite *ellipsoïde de polarisation*. On retrouverait exactement ce même résultat en se plaçant au point de vue d'Hugoniot : le calcul est tout analogue à celui qui a été présenté plus haut (n° **261**) ou à celui que nous ferons plus loin (n° **267**).

264. — Laissons maintenant de côté le cas des déformations infiniment petites et proposons-nous, pour un solide isotrope ou non, l'étude des ondes élastiques *avec déformations finies*.

Le cas où il existe de telles déformations a été envisagé par MM. Boussinesq et Brillouin. Pour écrire, dans ces conditions, les équations de l'équilibre, on part encore de la considération de l'*énergie élastique*, c'est-à-dire d'une certaine intégrale triple de la forme

$$(2) \qquad \iiint W\rho\, dx\, dy\, dz = \iiint W\rho_0\, da\, db\, dc$$

où $\rho\, dx\, dy\, dz = \rho_0\, da\, db\, dc$ est l'élément de masse, et où W est, en chaque point, une certaine fonction des six composantes de déformation $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Cette fonction contient, d'ailleurs ou non, explicitement a, b, c suivant que le corps considéré est hétérogène ou homogène, dans son état initial.

Le système de variables indépendantes composé du temps et des coordonnées *initiales* a, b, c étant seul employé dans ce chapitre et, par

conséquent aucune confusion n'étant à craindre à cet égard, il ne sera pas nécessaire de nous conformer à la convention du n° **61** : nous désignerons donc par le symbole ∂ les dérivées prises par rapport à ces variables, le signe δ étant réservé aux composantes des déplacements virtuels.

Nous écrirons que la variation de l'intégrale (**2**), pour tout système de déplacements virtuels (δx, δy, δz) communiqués aux différents points, est égale au travail correspondant des forces données (rapportées à l'unité de masse) (X, Y, Z), soit à l'expression

$$(8) \qquad \iiint (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,\rho\,dx\,dy\,dz,$$

si les positions des points de la surface sont fixées, ou à cette expression jointe au travail des pressions extérieures, dans le cas contraire.

Soient, comme au n° **47**, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 les dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c. La variation de l'intégrale (**2**) est (en observant que l'élément de masse $\rho\,dx\,dy\,dz$ ne varie pas)

$$(9) \quad \begin{cases} \displaystyle\iiint \left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial W}{\partial b_1}\delta b_1 + \frac{\partial W}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial W}{\partial a_2}\delta a_2 + \dots \right. \\ \qquad\qquad \displaystyle\left. + \frac{\partial W}{\partial c_3}\delta c_3\right)\rho\,dx\,dy\,dz \\ \displaystyle\iiint \left[\frac{\partial W}{\partial a_1}\frac{\partial(\delta x)}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial b_1}\frac{\partial(\delta x)}{\partial b} + \dots\dots\right]\rho\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Suivant les règles générales du calcul des variations, nous devrons transformer cette expression par une intégration par parties ou, plus exactement, par la formule de Green. Nous aurons ainsi une intégrale de surface et une nouvelle intégrale de volume

$$\begin{aligned} -\iiint \Bigg\{ &\delta x\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_1}\right)\right] \\ &+ \delta y\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_2}\right)\right] \\ &+ \delta z\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_3}\right)\right]\Bigg\}\rho\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Pour que la somme ainsi obtenue soit identiquement égale à la somme de la quantité (8) et du travail des pressions, il faut qu'il y ait égalité, quels que soient δx, δy, δz, d'une part entre les intégrales de surface, d'autre part entre les intégrales de volume. Celles-ci nous donneront les équations internes de l'équilibre, savoir

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_1}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_1}\right)+X=0\\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_2}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_2}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_2}\right)+Y=0\\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_3}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_3}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_3}\right)+Z=0,\end{aligned}\right.$$

tandis que l'égalité des intégrales de surface fournira (en supposant données les pressions extérieures) les conditions aux limites.

Si enfin nous voulons passer du cas de l'équilibre à celui du mouvement, nous n'aurons qu'à substituer au principe du travail virtuel celui de Hamilton : ceci revient d'ailleurs (comparer ce que nous avons dit au chap. III) à faire usage du principe de d'Alembert et à introduire dans les forces X, Y, Z les forces d'inertie. Les équations à la surface resteront inaltérées pendant que les équations internes deviendront

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_1}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_1}\right)+X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0\\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_2}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_2}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_2}\right)+Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_3}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_3}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_3}\right)+Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont du second ordre, tant par rapport à t que par rapport à a, b, c, puisque l'on doit dériver les termes $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, $\frac{\partial W}{\partial b_i}$, $\frac{\partial W}{\partial c_i}$ qui sont des fonctions des dérivées du premier ordre. Si le corps est homogène, ces quantités ne contiendront pas explicitement a, b, c, et, par conséquent, les équations ne comprendront que des termes du second ordre. Il y entrerait, en outre, des termes du premier ordre dans le cas contraire.

265. — Le cas de l'Hydrodynamique correspond à celui où W est fonction de la seule densité, autrement dit (l'état initial étant supposé homogène) du déterminant fonctionnel

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Pour $W = F(D)$, les dérivées précédemment considérées ne sont autres que les produits de $F'(D)$ par les mineurs A_1, B_1, C_1 du déterminant précédent. L'expression

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial W}{\partial c_1}\right)$$

qui figure dans la première équation (**10**) s'écrit donc

$$F'(D)\left(\frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{\partial B_1}{\partial b} + \frac{\partial C_1}{\partial c}\right) + F''(D)\left(A_1\frac{\partial D}{\partial a} + B_1\frac{\partial D}{\partial b} + C_1\frac{\partial D}{\partial c}\right).$$

Le coefficient de $F'(D)$ est nul, ainsi qu'il est bien connu par la théorie du multiplicateur [1]. Celui de $F''(D)$ peut s'écrire

$$D\left(\frac{A_1}{D}\frac{\partial D}{\partial a} + \frac{B_1}{D}\frac{\partial D}{\partial b} + \frac{C_1}{D}\frac{\partial D}{\partial c}\right).$$

Or ceci n'est autre que $D\frac{\partial D}{\partial x}$; car les quantités $\frac{A_1}{D}$, $\frac{B_1}{D}$, $\frac{C_1}{D}$ sont les dérivées partielles de a, b, c par rapport à x (x, y, z étant pris comme variables indépendantes). L'équation

$$DF''(D)\frac{\partial D}{\partial x} + X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

est identique à la première équation (**1**) du chap. V, moyennant l'équation (**3**) du n° **17** et la relation

$$(12) \qquad p = -\rho_0 F'(D).$$

266. — Les équations (**11**), faisant connaître les composantes de l'accélération en chaque point par le moyen des dérivées partielles de x, y, z relativement à a, b, c en ce point, appellent des remarques toutes semblables à celles que nous avons faites pour les équations de l'Hydrodynamique (n°s **139-140**) et pour les équations (**4**) (n° **260**). L'accord à établir entre les équations internes et les conditions aux limites nous conduit donc de nouveau à étudier la propagation des ondes.

A cet effet, nous aurons d'abord à expliciter les équations du mouvement.

---

[1] JORDAN, *Cours d'Analyse*, tome III n° **44**, p. 49.

Si nous tenons compte des valeurs de ε_i, γ_i que définissent les formules (7) du n° **51**, nous voyons qu'on aura

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a_1} &= a_1 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} + b_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} + c_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma_2}, \\ \frac{\partial W}{\partial b_1} &= a_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} + b_1 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma_1}, \\ \frac{\partial W}{\partial c_1} &= a_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma_2} + b_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} + c_1 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}. \end{aligned}\right.$$

Lorsque nous reporterons ces valeurs dans la première équation (**11**), la différenciation donnera deux sortes de termes : elle pourra, en effet, dans chaque terme des expressions que nous venons d'écrire, porter soit sur le premier facteur, soit sur le second. Dans le premier cas, nous aurons les trois quantités

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial W}{\partial \gamma_2}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial^2 x}{\partial b^2}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c}\frac{\partial W}{\partial \gamma_1}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c}\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial c^2}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}. \end{gathered}$$

Soient encore λ, μ, ν les composantes d'une discontinuité du second ordre, rapportées à l'état initial (qui est ici, cette fois, l'état (a, b, c) et non l'état actuel) ; α, β, γ, θ les cosinus directeurs de la normale à l'onde et la vitesse de propagation. Si nous considérons les variations brusques des dérivées du second ordre qui figurent dans l'expression précédente, et que nous les remplacions par leurs valeurs trouvées au n° **85**, nous voyons que la discontinuité éprouvée par la somme de ces trois expressions est λQ, en désignant par Q la quantité

$$Q = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}\alpha^2 + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2}\beta^2 + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}\gamma^2 + 2\frac{\partial W}{\partial \gamma_1}\beta\gamma + 2\frac{\partial W}{\partial \gamma_2}\gamma\alpha + 2\frac{\partial W}{\partial \gamma_3}\alpha\beta.$$

267. — Prenons maintenant le résultat obtenu lorsque, dans les expressions (**13**), on fait partout porter la différenciation sur les seconds facteurs. Ici interviennent les dérivées par rapport à a, b, c, des composantes de déformation, dérivées, dont les variations ont été calculées au n° **113**. D'après ce qui a été trouvé en cet endroit, nous introduirons les quantités

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &e_1 = L\alpha,\ e_2 = M\beta,\ e_3 = N\gamma,\ g_1 = M\gamma + N\beta,\ g_2 = N\alpha + L\gamma, \\ &g_3 = L\beta + M\alpha, \end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$(15)\quad L = \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3,\quad M = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3,\quad N = \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3.$$

Les variations brusques des dérivées des composantes de déformation s'écriront alors sous la forme simple

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a}\right] = \alpha e_i,\quad \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial b}\right] = \beta e_i,\quad \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial c}\right] = \gamma e_i,\quad \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial a}\right] = \alpha g_i,\quad \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial b}\right] = \beta g_i,$$
$$\left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial c}\right] = \gamma g_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

D'après cela, soit à calculer $\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i}\right)\right]$: on a

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i}\right)\right] = \alpha\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_1} e_1 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_2} e_2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_3} e_3 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \gamma_1} g_1 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \gamma_2} g_2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \gamma_3} g_3\right).$$

Considérons la forme quadratique

$$\Psi(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3) = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1^2} e_1^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_1} e_1 g_1 + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1^2} g_1^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} g_1 g_2,$$

dans laquelle figurent les $\frac{6 \times 5}{2} + 6 = 21$ produits deux à deux et carrés des six quantités e, g, chacun de ces produits ayant comme coefficient la dérivée seconde de W par rapport aux variables ε ou γ correspondantes et le terme ainsi obtenu devant (comme à l'ordinaire) être doublé si ces variables sont différentes, c'est-à-dire s'il s'agit d'un terme rectangle.

On voit immédiatement comment est engendrée cette expression.

La différentielle seconde de W est, en effet,

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} d^2\varepsilon_1 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} d^2\gamma_3 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1^2} d\varepsilon_1^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} d\gamma_1 d\gamma_2,$$

et contient d'une part les différentielles secondes $d^2\varepsilon_1, \ldots, d^2\gamma_3$, d'autre part, les différentielles premières $d\varepsilon_1, \ldots, d\gamma_3$. Si, dans la partie qui contient celles-ci, on les remplace respectivement par $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$, on obtient la forme quadratique Ψ.

Cette forme étant ainsi introduite, la variation $\left[\frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i}\right)\right]$ n'est évidemment autre que $\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial e_i}$; et, de même, la variation de la dérivée $\frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_i}\right)$ est $\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial g_i}$.

Substituant dans la somme qu'il s'agit d'évaluer, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\alpha\left(a_1\frac{\partial\Psi}{\partial e_1}+b_1\frac{\partial\Psi}{\partial g_3}+c_1\frac{\partial\Psi}{\partial g_2}\right)\\
+&\frac{1}{2}\beta\left(a_1\frac{\partial\Psi}{\partial g_3}+b_1\frac{\partial\Psi}{\partial e_2}+c_1\frac{\partial\Psi}{\partial g_1}\right)\\
+&\frac{1}{2}\gamma\left(a_1\frac{\partial\Psi}{\partial g_2}+b_1\frac{\partial\Psi}{\partial g_1}+c_1\frac{\partial\Psi}{\partial e_3}\right)
\end{aligned}$$

Le coefficient de a_1 est

$$\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial e_1}+\beta\frac{\partial\Psi}{\partial g_3}+\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial g_2}\right).$$

Mais si nous remontons aux formules (14) qui définissent e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 en fonction de L, M, N, nous voyons que cette expression est égale à $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial L}$. De même, le coefficient de b_1 est $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial M}$, et celui de c_1, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial N}$. La somme des termes qui contiennent explicitement a_1, b_1, c_1 est donc

$$\frac{1}{2}\left(a_1\frac{\partial\Psi}{\partial L}+b_1\frac{\partial\Psi}{\partial M}+c_1\frac{\partial\Psi}{\partial N}\right).$$

Si enfin nous tenons compte des formules (15) par lesquelles ont été définis L, M, N, nous voyons que cette expression représente

[illegible]

L'équation cherchée et les deux autres analogues résultant des deux dernières équations (11), s'écrivent donc

(16) [illegible]

Elles montrent que [illegible]

d'une direction principale de la quadrique représentée (λ, μ, ν étant regardés comme des coordonnées ; α, β, γ, a, b, c, x, y, z, a_1, b_1, c_1, comme des constantes) par l'équation

$$(17) \quad \mathrm{H}(\lambda, \mu, \nu) = \mathrm{Q}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \Psi(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3) = 1.$$

Cette quadrique est l'*ellipsoïde de polarisation*, analogue à celui dont nous avons parlé au n° **263**.

268. — Nous trouvons ainsi un résultat tout semblable à celui qui était déjà connu pour le cas des déformations infiniment petites, mais qui doit être énoncé ici sous une forme un peu plus précise puisqu'il y a lieu de distinguer entre l'état initial et l'état actuel du corps considéré. Le segment (λ, μ, ν) étant, comme nous le savons, défini dans l'espace lieu des positions actuelles des molécules, l'énoncé est :

Une même direction d'onde est susceptible de propager trois directions de discontinuité différentes, lesquelles sont rectangulaires entre elles dans le milieu déformé.

269. — Les équations (14) font, en outre, connaître les valeurs de la vitesse de propagation. Celles-ci sont les racines carrées des trois racines de l'équation en s relatives à la quadrique dont nous venons de parler. Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que cette quadrique soit un ellipsoïde réel.

Nous allons constater que cette condition est toujours remplie dans les cas qui peuvent se présenter.

Pour voir à quoi est due cette circonstance, considérons d'abord le cas des liquides. Nous avons vu qu'alors la vitesse de propagation a pour carré la quantité $\frac{dp}{d\rho}$. Or, la condition que cette quantité soit positive n'est autre que la condition de stabilité de l'équilibre interne : elle exprime qu'une diminution de volume imposée au gaz produit une augmentation de la pression, c'est-à-dire un changement d'effort interne de nature à s'opposer à la modification produite.

Nous sommes donc conduits à rechercher les conditions de stabilité de l'équilibre interne et à voir si elles ne conduisent pas à la condition cherchée.

Nous admettrons, conformément à ce qui est établi pour le cas des systèmes dépendant d'un nombre fini de paramètres, qu'il est nécessaire, pour la stabilité, que l'énergie élastique soit réellement minima (au lieu

d'avoir seulement sa variation première nulle) ou, du moins, que sa variation seconde ne puisse devenir négative. Nous allons, par ce moyen, exprimer la stabilité de l'équilibre d'un corps fixé par tous les points de sa surface, en l'absence de forces X, Y, Z.

Si nous faisons subir l'opération δ à la variation première (**9**), il viendra sous le signe $\int\int\int$ deux sortes de termes : Ceux que l'on obtient en différentiant δa_i, δb_i, δc_i, et ceux qu'on obtient en différentiant les facteurs $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, ...

Ainsi qu'il se produit dans tous les cas analogues de calcul des variations, la première catégorie de termes donne une somme nulle. On peut, en effet, lui faire subir les mêmes transformations qu'à la variation première elle-même, ce qui fournit un résultat identique à celui que nous avons obtenu précédemment, δx, δy, δz étant simplement remplacés par $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$. Ces dernières variations étant nulles comme les premières à la surface (puisque les points de celles-ci sont supposés fixés), la somme en question disparaît en vertu des équations (**10**).

Il nous reste l'intégrale triple

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\int\int\left[\delta a_1 \,.\, \delta\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) + \delta b_1 \,.\, \delta\left(\frac{\partial W}{\partial b_1}\right) + \ldots\right.\\ &\qquad \left.\ldots + \delta b_3\, \delta\left(\frac{\partial W}{\partial b_3}\right) + \delta c_3\, \delta\left(\frac{\partial W}{\partial c_3}\right)\right] \rho\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}\right.$$

270. — La quantité sous le signe $\int\int\int$ est une forme quadratique par rapport à δa_i, δb_i, δc_i. Si cette forme est définie positive pour toute valeur de a, b, c, il en est de même de l'intégrale précédente.

La réciproque n'est pas exacte; de ce que l'intégrale (**18**) doit être essentiellement positive, il ne résulte pas forcément qu'il en soit de même de son élément différentiel. Mais nous allons voir, par contre, que celui-ci ne doit prendre que des valeurs positives tant que les variations δa_i, ... ont la forme

$$(19)\qquad \left\{\begin{matrix} \delta a_1 = \lambda\alpha &, & \delta b_1 = \lambda\beta &, & \delta c_1 = \lambda\gamma, \\ \delta a_2 = \mu\alpha &, & \delta b_2 = \mu\beta &, & \delta c_2 = \mu\gamma, \\ \delta a_3 = \nu\alpha &, & \delta b_3 = \nu\beta &, & \delta c_3 = \nu\gamma, \end{matrix}\right.$$

et cela quels que soient λ, μ, ν, α, β, γ : autrement dit, toutes les fois que les δa_i, ... satisferont aux équations [1])

$$(19') \quad \delta a_1 \delta b_2 - \delta b_1 \delta a_2 = 0, \ \delta a_1 \delta b_3 - \delta b_1 \delta a_3 = 0, \ldots\ldots, \delta b_2 \delta c_3 - \delta c_2 \delta b_3 = 0.$$

Remarquons, à cet effet, que les valeurs ainsi écrites ont une interprétation que l'on aperçoit immédiatement. Elles coïncident avec celles des variations brusques des quantités a_i, b_i, c_i, dans une discontinuité du premier ordre qui aurait lieu suivant la surface d'onde considérée.

Autrement dit, pour passer de la position actuelle du milieu à la position infiniment voisine correspondant aux variations (19), il suffira de faire subir à ce milieu une déformation de l'espèce considérée au n° 56 et ayant (λ, μ, ν) pour segment caractéristique.

Cela posé, par un point déterminé intérieur à notre solide, faisons passer une petite portion de surface Σ dont le plan tangent ait pour cosinus directeurs α, β, γ. Si ces trois quantités jointes à trois valeurs convenablement choisies de λ, μ, ν fournissent pour les expressions (19) des valeurs qui rendent négatif l'élément différentiel de (18) au point considéré, on pourra prendre Σ assez petit pour que la même circonstance ait lieu en tous les points de cette portion de surface.

Σ étant ainsi choisi une fois pour toutes, nous le considérerons comme la base d'un petit cylindre C, de hauteur h. Supposons que l'intérieur de celui-ci subisse une déformation du type étudié au n° 56, la surface dont les points restent fixes étant Σ, et le segment caractéristique (λ, μ, ν), le déplacement maximum ainsi obtenu sera de l'ordre de h. Il est aisé de voir que l'on pourra déterminer alors la déformation du reste du solide de manière : 1° que les points de la surface extérieure restent fixes ; 2° que la continuité du déplacement soit conservée sur la surface du cylindre C, autrement dit que δx, δy, δz ne changent pas de valeurs pour un point de cette surface suivant qu'on considère ce point comme faisant partie de l'intérieur ou de l'extérieur de C ; 3° que δx, δy, δz *et leurs dérivées partielles du premier ordre* soient partout (en dehors de C), des quantités très petites de l'ordre de h.

---

[1] Inversement, on démontre que si, en ajoutant à la forme quadratique qui figure dans l'intégrale (18), une combinaison linéaire quelconque des premiers membres des équations (19'), on peut obtenir une forme définie positive, l'intégrale est bien minimum (du moins lorsqu'on la prend dans un volume suffisamment restreint). Mais il reste à examiner si la condition suffisante ainsi formulée est équivalente à la condition nécessaire obtenue dans le texte.

Dans ces conditions, l'intégrale (**18**) étendue à l'extérieur de C, sera de l'ordre de h^2. Au contraire, pour l'intérieur de C (où δa_i, ... ont sensiblement les valeurs déterminées (**19**)), elle sera négative et de l'ordre de h. Elle sera donc négative au total.

Pour que ceci n'ait point lieu, il faut par conséquent, comme nous l'avions annoncé, que l'élément de l'intégrale (**18**) ne puisse devenir négatif lorsqu'on donne aux a_i, b_i, c_i les valeurs (**19**).

271. — Si maintenant nous nous reportons aux valeurs (**13**) de $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, $\frac{\partial W}{\partial b_i}$, $\frac{\partial W}{\partial c_i}$, nous voyons que $\delta\left(\frac{\partial W}{\partial a_i}\right)$ par exemple, contiendra deux sortes de termes : les uns qui s'obtiennent en prenant les variations des premiers facteurs et qui nous donnent

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}\,\delta a_i + \frac{\partial W}{\partial \gamma_3}\,\delta b_i + \frac{\partial W}{\partial \gamma_2}\,\delta c_i\,;$$

les autres, qui s'obtiennent en faisant porter l'opération δ sur les facteurs $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}$, ...

Or, nous avons, par exemple,

$$\delta\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1^2}\,\delta\varepsilon_1 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2}\,\delta\varepsilon_2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3}\,\delta\varepsilon_3 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_1}\,\delta\gamma_1 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_2}\,\delta\gamma_2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_3}\,\delta\gamma_3.$$

Si nous considérons la forme quadratique $\Psi(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$ dont il a été question tout à l'heure, il est clair que l'expression précédente représente $\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial e_1}$, pourvu que e_i, g_i soient respectivement remplacés par $\delta\varepsilon_i$, $\delta\gamma_i$. Il vient donc

$$\delta\frac{\partial W}{\partial a_i} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}\delta a_i + \frac{\partial W}{\partial \gamma_3}\delta b_i + \frac{\partial W}{\partial \gamma_2}\delta c_i + \frac{1}{2}a_i\frac{\partial \Psi}{\partial(\delta\varepsilon_1)} + \frac{1}{2}b_i\frac{\partial \Psi}{\partial(\delta\gamma_3)} + \frac{1}{2}c_i\frac{\partial \Psi}{\partial(\delta\gamma_2)}.$$

Nous avons à multiplier cette quantité par δa_1, et les quantités analogues par δb_1, δc_1 .....

Si nous remarquons que l'on a

$$\delta\varepsilon_1 = a_1\delta a_1 + a_2\delta a_2 + a_3\delta a_3, \quad \delta\varepsilon_2 = b_1\delta b_1 + b_2\delta b_2 + b_3\delta b_3,$$
$$\delta\varepsilon_3 = c_1\delta c_1 + c_2\delta c_2 + c_3\delta c_3,$$
$$\delta\gamma_1 = b_1\delta c_1 + c_1\delta b_1 + b_2\delta c_2 + c_2\delta b_2 + b_3\delta c_3 + c_3\delta b_3, \ .....$$

nous trouverons au total

$$\frac{1}{2}\delta\varepsilon_1\frac{\partial\Psi}{\partial(\delta\varepsilon_1)}+\frac{1}{2}\delta\varepsilon_2\frac{\partial\Psi}{\partial(\delta\varepsilon_2)}+\frac{1}{2}\delta\varepsilon_3\frac{\partial\Psi}{\partial(\delta\varepsilon_3)}+\frac{1}{2}\delta\gamma_1\frac{\partial\Psi}{\partial(\delta\gamma_1)}+\frac{1}{2}\delta\gamma_2\frac{\partial\Psi}{\partial(\delta\gamma_2)}$$
$$+\frac{1}{2}\delta\gamma_3\frac{\partial\Psi}{\partial(\delta\gamma_3)}=\Psi(\delta\varepsilon_1,\delta\varepsilon_2,\delta\varepsilon_3,\delta\gamma_1,\delta\gamma_2,\delta\gamma_3).$$

Finalement, la quantité sous le signe $\int\int\int$, dans la variation seconde, sera

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1}(\delta a_1^2+\delta a_2^2+\delta a_3^2)+\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2}(\delta b_1^2+\delta b_2^2+\delta b_3^2)\\&+\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3}(\delta c_1^2+\delta c_2^2+\delta c_3^2)+2\frac{\partial W}{\partial\gamma_1}(\delta b_1\delta c_1+\delta b_2\delta c_2+\delta b_3\delta c_3)\\&+2\frac{\partial W}{\partial\gamma_2}(\delta c_1\delta a_1+\delta c_2\delta a_2+\delta c_3\delta a_3)+2\frac{\partial W}{\partial\gamma_3}(\delta a_1\delta b_1+\delta a_2\delta b_2+\delta a_3\delta b_3)\end{aligned}\right.$$
$$+\Psi(\delta\varepsilon_1,\delta\varepsilon_2,\delta\varepsilon_3,\delta\gamma_1,\delta\gamma_2,\delta\gamma_3).$$

C'est cette quantité qui devra, pour qu'il y ait stabilité, être positive lorsqu'on donnera à δa_i, δb_i, δc_i les valeurs (**19**).

Les quantités $\delta\varepsilon_i$, $\delta\gamma_i$ prendront précisément les valeurs e_i, g_i définies par les formules (**14**), (**15**) et, par conséquent, l'expression (**20**) deviendra identique au premier membre de (**17**). Nous obtenons donc bien la conclusion cherchée : de la stabilité de l'équilibre interne résulte que les vitesses de propagation des différentes ondes sont réelles.

De plus, si nous admettons que l'expression (**20**) ne peut même pas s'annuler dans les conditions indiquées sauf pour $\lambda=\mu=\nu=0$ ou $\alpha=\beta=\gamma=0$, ces vitesses de propagation restent toujours finies.

272. — Dans le cas de l'Hydrodynamique où $W=F(D)$, l'élément $[F'(D)\,\delta^2 D+F''(D)\,\delta D^2]\,\rho\,dx\,dy\,dz$ de la variation seconde se réduit à

$$F''(D)\,(\delta D)^2\,\rho\,dx\,dy\,dz$$

la quantité $\delta^2 D$ se réduisant, comme il est facile de s'en assurer, à une combinaison linéaire des formes quadratiques qui forment les premiers membres des équations (**19'**). La condition de stabilité est donc bien (comme nous l'avions énoncé au n° **131**) $F''(D)>0$ ou $\frac{dp}{d\rho}>0$.

273. — Les considérations précédentes fournissent une interprétation simple du premier membre de l'équation (**17**).

Remplaçons, en effet, dans les formules (**19**), λ, μ, ν par λdt, μdt, νdt, en désignant par dt la différentielle d'un paramètre. La déformation sera, dans ces conditions, infiniment petite et, ainsi que nous l'avons remarqué au n° **113**bis, les accroissements de ε_i, γ_i seront précisément $e_i dt$, $g_i dt$. Supposons, en outre, ce qui est évidemment compatible avec l'hypothèse que nous venons de faire, que les dérivées secondes de x, y, z — et par conséquent aussi, celles de a_i, b_i, c_i — par rapport à t soient nulles : par exemple, que x, y, z aient les valeurs

$$x = x_0 + \lambda t f(a, b, c), \qquad y = y_0 + \mu t f, \qquad z = z_0 + \nu t f$$

où $f(a, b, c)$ représente le premier membre de l'équation de la surface d'onde, défini comme nous l'avons spécifié au n° **80**.

Alors le coefficient de $\frac{t^2}{2}$ dans le développement de W sera la quantité $\Pi(\lambda, \mu, \nu)$ qui nous occupe.

Si, par conséquent, autour du point considéré, nous envisageons un petit volume $d\tau$ auquel nous ferons subir la déformation qui vient d'être définie, le coefficient de $\frac{t^2}{2}$, dans la valeur de l'énergie élastique ainsi engendrée, sera le produit de $\rho d\tau$ par le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde de polarisation.

274. — Nous avons vu plus haut, pour le cas des déformations infiniment petites que, dans un corps isotrope, il existait deux sortes d'ondes, les unes exclusivement longitudinales, les autres exclusivement transversales.

Ce théorème subsiste-t-il dans le cas des déformations finies?

Cette question peut être regardée comme un cas particulier d'une autre plus générale. On sait, en effet, que l'optique des corps cristallins conduit à considérer, à l'exclusion des autres, les milieux élastiques isotropes ou non, pour lesquels une pareille décomposition en ondes longitudinales et ondes transversales a lieu.

La condition nécessaire et suffisante pour cela est que l'ellipsoïde de polarisation ait une direction principale normale à la surface d'onde considérée dans le milieu déformé.

La détermination des formes de la fonction W pour lesquels il en est ainsi est bien connue lorsqu'il s'agit des déformations infiniment petites, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que W est une forme quadratique par rapport aux ε_i, γ_i. Proposons-nous d'effectuer cette même détermination dans le cas général.

Les cosinus directeurs de la surface d'onde dans le milieu déformé sont proportionnels aux quantités l, m, n définies par les équations

(21)
$$\begin{cases} \alpha = la_1 + ma_2 + na_3 \\ \beta = lb_1 + mb_2 + nb_3 \\ \gamma = lc_1 + mc_2 + nc_3. \end{cases}$$

Il faudra donc que les équations (16) soient vérifiées lorsqu'on y remplace λ, μ, ν par l, m, n. On pourra d'ailleurs, dans ces équations, supprimer les premiers termes des seconds membres et écrire

(22)
$$\begin{cases} sl = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial l} \\ sm = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial m} \\ sn = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial n}. \end{cases}$$

Car les termes lQ, mQ, nQ (provenant de la quantité $Q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$ qui figure dans Π) ne feraient que changer la valeur de s d'une quantité égale à Q sans modifier les directions principales.

Nous observerons que si l, m, n sont donnés par les relations (21), les quantités L, M, N ne sont autres que α, β, γ. Nous dirigerons le calcul de manière à introduire ces quantités, à l'exclusion de l, m, n. A cet effet, nous multiplierons les équations (22), d'abord par a_1, a_2, a_3 respectivement, puis par b_1, b_2, b_3 enfin par c_1, c_2, c_3. Il viendra alors

$$s(a_1l + a_2m + a_3n) = sL = \frac{1}{2}\left(a_1\frac{\partial\Psi}{\partial l} + a_2\frac{\partial\Psi}{\partial m} + a_3\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)$$
$$s(b_1l + b_2m + b_3n) = sM = \frac{1}{2}\left(b_1\frac{\partial\Psi}{\partial l} + b_2\frac{\partial\Psi}{\partial m} + b_3\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)$$
$$s(c_1l + c_2m + c_3n) = sN = \frac{1}{2}\left(c_1\frac{\partial\Psi}{\partial l} + c_2\frac{\partial\Psi}{\partial m} + c_3\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)$$

Si alors nous remplaçons les dérivées $\frac{\partial\Psi}{\partial l}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial m}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ par leurs expressions à l'aide des dérivées prises par rapport à L, M, N, nous aurons (eu égard aux formules qui définissent les ε_i, γ_i)

$$sL = \frac{1}{2}\left[(1 + 2\varepsilon_1)\frac{\partial\Psi}{\partial L} + \gamma_3\frac{\partial\Psi}{\partial M} + \gamma_2\frac{\partial\Psi}{\partial N}\right]$$
$$sM = \frac{1}{2}\left[\gamma_3\frac{\partial\Psi}{\partial L} + (1 + 2\varepsilon_2)\frac{\partial\Psi}{\partial M} + \gamma_1\frac{\partial\Psi}{\partial N}\right]$$
$$sN = \frac{1}{2}\left[\gamma_2\frac{\partial\Psi}{\partial L} + \gamma_1\frac{\partial\Psi}{\partial M} + (1 + 2\varepsilon_3)\frac{\partial\Psi}{\partial N}\right].$$

Nous résoudrons ces équations par rapport à $\frac{\partial\Psi}{\partial L}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial M}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial N}$. Cette résolution introduit les mineurs E_i, G_i du déterminant

$$(23) \qquad D^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

par rapport aux éléments $1 + 2\varepsilon_i$, γ_i respectivement, les coefficients de sL, sM, sN dans les valeurs de $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial L}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial M}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial N}$ étant les quantités $\frac{E_i}{D^2}$, $\frac{G_i}{D^2}$.
En introduisant, au lieu de s, le nombre

$$k = \frac{D^2}{s}$$

et, en désignant par Φ la forme

$$\Phi(p, q, r) = E_1 p^2 + E_2 q^2 + E_3 r^2 + 2G_1 qr + 2G_2 rp + 2G_3 pq$$

c'est-à-dire la forme adjointe de celle qui donne l'élément linéaire du milieu déformé, les valeurs en question seront

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial L} = \frac{1}{2} k \frac{\partial\Phi}{\partial L},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial M} = \frac{1}{2} k \frac{\partial\Phi}{\partial M},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial N} = \frac{1}{2} k \frac{\partial\Phi}{\partial N},$$

et les relations que nous venons d'écrire seront cette fois vérifiées à condition qu'on fasse α, β, γ égaux respectivement à L, M, N.

Cette substitution ne doit être opérée qu'après les différenciations. Si, au contraire, on faisait immédiatement $\alpha = L$, $\beta = M$, $\gamma = N$ on introduirait en trop, au premier membre, les termes provenant de la différenciation par rapport à α, β, γ. Mais les valeurs de e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, qui seules interviennent dans Ψ, sont symétriques par rapport aux deux systèmes de quantités L, M, N ; α, β, γ. Les termes ainsi introduits seront donc respectivement égaux à ceux qui existaient primitivement et auront pour effet d'en doubler la valeur. Nous pourrons donc remplacer les équations précédentes par

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial L} &= k\frac{\partial\Phi}{\partial L} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial M} &= k\frac{\partial\Phi}{\partial M} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial N} &= k\frac{\partial\Phi}{\partial N} \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles, maintenant Ψ aura la valeur obtenue en remplaçant, *avant toute différenciation*, α, β, γ par L, M, N, c'est-à-dire en faisant

$$(25)\quad e_1 = L^2,\ e_2 = M^2,\ e_3 = N^2,\ g_1 = 2MN,\ g_2 = 2NL,\ g_3 = 2LM.$$

Avec les relations (24), nous avons cette fois, affaire à des identités ayant lieu pour toutes les valeurs des variables indépendantes L, M, N qui y figurent. Ces relations expriment, comme on sait, que Ψ est une fonction de Φ, et, comme la première de ces deux expressions est un polynôme homogène du quatrième degré, la seconde un polynôme homogène du second degré, on a nécessairement

$$\Psi(L^2, M^2, N^2, 2MN, 2LN, 2LM) = h\,\Phi(L, M, N)^2$$

h étant indépendant de L, M, N.

275. — Nous avons maintenant à nous demander quelle devra être la forme quadratique Ψ pour se réduire à $h\Phi^2$ lorsqu'on remplacera respectivement les e_i, g_i par les valeurs (14). C'est ce qui aura lieu, non seulement si Ψ est égale à $h\Psi_0$, en posant

$$\Psi_0 = (E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3 + G_1 g_1 + G_2 g_2 + G_3 g_3)^2;$$

mais aussi si Ψ est égale à une combinaison linéaire quelconque de $h\Psi_0$ et des six formes

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{lll} 4e_2e_3 - g_1^2, & 4e_3e_1 - g_2^2, & 4e_1e_2 - g_3^2, \\ g_2g_3 - 2e_1g_1, & g_3g_1 - 2e_2g_2, & g_1g_2 - 2e_3g_3. \end{array}\right.$$

Cette condition suffisante est d'ailleurs nécessaire : il suffit, pour s'en convaincre, d'exprimer directement que la forme du quatrième degré obtenue en remplaçant, dans $\Psi - h\Psi_0$, les e_i, g_i par les valeurs (25) est identiquement nulle.

276. — L'expression de Ψ étant ainsi obtenue il reste à remonter à celle de W pour laquelle il est clair que l'on a ainsi un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. L'intégration de ce système est d'ailleurs tout élémentaire et il nous suffira d'en indiquer sommairement la marche.

Les formes (26) manquant de termes en e_1^2, $e_1 g_3$, $e_1 g_2$, ces termes devront avoir dans Ψ des valeurs proportionnelles à celles qu'ils ont dans Ψ_0 et, par conséquent, les dérivées de W devront vérifier les relations

$$(27)\quad \frac{\partial^2 W}{\partial e_1^2} : E_1^2 = \frac{\partial^2 W}{\partial e_1 \partial g_3} : E_1 G_3 = \frac{\partial^2 W}{\partial e_1 \partial g_2} : E_1 G_2 = h.$$

Comme on a (d'après (**23**))

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial(D^2)}{\partial\varepsilon_1}, \quad G_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial(D^2)}{\partial\gamma_3}, \quad G_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial(D^2)}{\partial\gamma_2},$$

ces relations montrent que la dérivée $\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1}$ peut s'écrire

$$\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1} = \text{fonct.}\ (D, \gamma_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

En faisant intervenir les relations analogues relatives aux dérivées $\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2}$, $\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3}$, on verra facilement que l'on peut écrire

$$\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1} = a\,(1 + 2\varepsilon_2)\,(1 + 2\varepsilon_3) + a_1$$
$$\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2} = a\,(1 + 2\varepsilon_3)\,(1 + 2\varepsilon_1) + a_2$$
$$\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3} = a\,(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2) + a_3$$

où a est une fonction de D pendant que a_1, a_2, a_3 peuvent contenir en outre, le premier γ_1, le second γ_2, le troisième γ_3.

On fera ensuite intervenir les autres termes de la forme Ψ : par exemple, on écrira que le coefficient de $e_2\,e_3$, plus quatre fois le coefficient de g_1^2, donne une somme qui a la même valeur dans Ψ que dans $h\Psi_0$ (la première forme (**26**) s'éliminant dans cette combinaison).

On arrivera ainsi aisément à l'expression générale de la fonction W, laquelle est

$$(\mathbf{28})\ \begin{cases} W = F(D) + a_{11}\,(\gamma_1^2 - 4\,\varepsilon_2\varepsilon_3) + a_{22}(\gamma_2^2 - 4\,\varepsilon_3\varepsilon_1) + a_{33}(\gamma_3^2 - 4\,\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ + 2a_{23}(2\varepsilon_1\gamma_1 - \gamma_2\gamma_3) + 2a_{31}\,(2\varepsilon_2\gamma_2 - \gamma_3\gamma_1) + 2a_{12}\,(2\varepsilon_3\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2) + P, \end{cases}$$

où les a_{ik} sont des constantes et P un polynôme quelconque du premier degré par rapport aux ε_i, γ_i [1].

C'est seulement lorsque W a la forme précédente que l'ellipsoïde de polarisation a un axe normal à l'onde.

---

(1) h a alors la valeur $\frac{1}{D}\frac{d}{dD}\left(\frac{F'(D)}{D}\right)$. La quantité $Q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$ des nos **266-267** étant, comme on le reconnaît aisément, proportionnelle à Ψ si les a_{ik} sont nuls, on constate que les termes en $F''(D)$ disparaissent de l'équation de l'ellipsoïde de polarisation, et on retombe bien, pour l'élément de variation seconde calculé au no **271**, sur l'expression obtenue au no **272** pour le cas des liquides.

277. — L'hypothèse que le solide, dans son état naturel, est isotrope exprime que les propriétés de ce corps ne doivent pas changer lorsqu'on effectue une transformation de coordonnées orthogonales sur a, b, c. La fonction W qui représente l'énergie élastique ne doit donc pas être modifiée par une telle transformation.

Or, dans cette transformation, les coefficients ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 de la quadrique $\varphi = 1$ introduite au n° **51** varient. Mais trois quantités, comme on sait, restent invariantes : ce sont les coefficients de l'équation en s relatives à cette quadrique, c'est-à-dire les expressions

$$A = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$B = (1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3) - \gamma_1^2 + (1 + 2\varepsilon_3)(1 + 2\varepsilon_1) - \gamma_2^2 + (1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2) - \gamma_3^2,$$
$$D^2.$$

L'isotropie du corps considéré s'exprime par ce fait que W ne dépend que des trois quantités précédentes.

Or, il ne résulte nullement de là que W soit nécessairement de la forme (**28**).

Par conséquent, la conclusion établie pour le cas des déformations infiniment petites ne s'étend pas aux déformations finies. Pour celles-ci, les ondes qui se propagent dans un corps isotrope ne sont pas, en général, longitudinales ou transversales.

CHAPITRE VII

—

LA THÉORIE GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES

§ 1. — CARACTÉRISTIQUES ET BICARACTÉRISTIQUES

278. — Nous avons vu que la propagation des ondes dans le mouvement rectiligne d'un gaz est liée aux propriétés des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

D'une façon tout analogue, l'étude des ondes dans l'espace à trois dimensions n'est pas distincte de la théorie des caractéristiques généralisée, comme l'a fait Beudon [1], au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes et étendue aux systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

Comme pour le cas de deux variables, cette théorie découle de la discussion du problème de Cauchy.

Prenons, pour fixer les idées, une équation du second ordre que nous supposerons, en outre, linéaire par rapport aux dérivées secondes, de sorte qu'elle aura la forme

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}p_{ik} + l = 0 \tag{1}$$

où p_{ik} désigne la dérivée partielle $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ de la fonction inconnue z par rapport aux variables indépendantes (différentes ou non) x_i et x_k. Nous supposons qu'il y a n de ces variables indépendantes, $x_1, x_2, \dots, x_n$, de sorte que les indices i et k prennent, indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $1, 2, \dots, n$.

---

[1] *Bull. Soc. Math. Fr.* 1897, p. 108-120.

Quant aux a_{ik} et à l, ce sont des fonctions de z, x_1, x_2, ..., x_n et des dérivées premières p_1, p_2 ...., p_n de z par rapport à x_1, x_2 ...., x_n.

279. — Considérons la multiplicité $n-1$ fois étendue ou ***hypersurface*** M_{n-1} représentée par l'équation

$$x_n = f(x_1, x_2 \dots, x_{n-1}). \tag{2}$$

Soient P_1, P_2, ..., P_{n-1} les dérivées partielles de x_n par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ déduites de l'équation (**2**). Si U est une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, et que cette dernière quantité soit remplacée par sa valeur tirée de l'équation (**2**), U sera, sur M_{n-1}, une fonction de $x_1, x_2, \dots,$ x_{n-1}. Nous désignerons par le symbole d les dérivées de U prises dans cette nouvelle hypothèse. Il est clair que celles-ci sont liées aux premières par les relations

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1). \tag{3}$$

Pour la fonction z, on aura ainsi

$$\frac{dz}{dx_i} = p_i + P_i p_n \tag{4}$$

et, pour $U = p_k$,

$$\frac{dp_k}{dx_i} = p_{ik} + P_i p_{kn} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots n-1 \\ k = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Si, d'une manière générale, nous désignons par la notation $p_{ik\dots h}$ l dérivée $\frac{\partial^\mu z}{\partial x_i \partial x_k \dots \partial x_h}$ prise par rapport aux μ variables (différentes ou no x_i, x_k, ..., x_h, on aura, pour $U = p_{kh}$

$$\frac{dp_{kh}}{dx_i} = p_{ikh} + P_i p_{khn} \tag{5'}$$

et ainsi de suite pour les dérivées de tous les ordres.

279 bis. — Cela posé, imaginons que l'on donne, en chaque point de les *conditions de Cauchy*, à savoir les valeurs de z et de ses dérivé mières. Celles-ci devront satisfaire, bien entendu, à la relation

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots p_n dx_n$$

sur M_{n-1}, c'est-à-dire aux relations (**4**) (de sorte qu'il suffira e de se donner z et p_n.

Cherchons à déterminer les dérivées secondes de z. Celles-ci devront vérifier les équations (5), et il est aisé de voir qu'en général elles seront ainsi déterminées, une fois adjointe l'équation (1). Si, en effet, nous considérons d'abord les relations (5) dans lesquelles l'indice k a la valeur n, ces relations nous donneront

$$p_{in} = \frac{dp_n}{dx_i} - P_i p_{nn}. \tag{6}$$

Si, au contraire, nous supposons k différent de n, nous aurons (en permutant les indices i et k)

$$p_{ik} = \frac{dp_i}{dx_k} - P_k p_{in}$$

et, en tenant compte de (6)

$$p_{ik} = \frac{dp_i}{dx_k} - P_k \frac{dp_n}{dx_i} + P_i P_k p_{nn}. \tag{6'}$$

Toutes les dérivées secondes sont ainsi exprimées en fonction de p_{nn}. Reportons enfin ces expressions dans l'équation donnée : nous aurons un résultat de la forme

$$Ap_{nn} + K = 0 \tag{7}$$

où A et K auront les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} A &= \sum_{i,\,k=1}^{n-1} a_{ik} P_i P_k - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} P_i + a_{nn} \\ &= \sum{}' a_{ik} P_i P_k - \sum{}' a_{in} P_i + a_{nn} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$K = \sum{}' a_{ik} \left(\frac{dp_i}{dx_k} - P_k \frac{dp_n}{dx_i}\right) + \sum{}' a_{in} \frac{dp_n}{dx_i} + l \tag{8'}$$

en désignant par la notation $\sum'$ une sommation où l'on ne donne pas aux indices variables la valeur n.

Supposons A différent de zéro. L'équation précédente nous déterminera p_{nn} et, par suite, toutes les dérivées du second ordre.

280. — Passons au calcul des dérivées troisièmes. Les relations (5) permettront de calculer toutes ces dérivées en fonction de la seule p_{nnn}. Pour cela, nous ferons tout d'abord deux, puis un des indices i, k et h

égaux à n : nous aurons ainsi des relations qui ne se distingueront évidemment de (6) et de (6′) que par l'indice n ajouté à chaque lettre p et qui nous donneront, par conséquent,

$$(9) \qquad \begin{cases} p_{inn} = \dfrac{dp_{nn}}{dx_i} - P_i p_{nnn}, \\ p_{ikn} = \dfrac{dp_{in}}{dx_k} - P_k \dfrac{dp_{nn}}{dx_i} + P_i P_k p_{nnn}, \end{cases}$$

d'où l'on déduirait les dérivées dans lesquelles aucun indice de différenciation n'est égal à n par une troisième application de la formule (5′).

Nous avons, d'autre part, entre les dérivées cherchées, les relations obtenues en différenciant l'équation donnée (1). Mais il suffit d'écrire une seule d'entre elles. Toutes les autres se réduiront à la première, moyennant les relations (5), (5′) : car, si nous désignons par $\mathcal{F}$ le premier membre de l'équation (1), on pourra différencier, sur M_{n-1}, l'équation $\mathcal{F} = 0$, puisque celle-ci est vérifiée en chaque point de M_{n-1}, et l'on aura

$$0 = \frac{d\mathcal{F}}{dx_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n},$$

ce qui montre bien que la condition $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n} = 0$ entraine $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} = 0$, pour toutes les valeurs de i.

Or, si nous différencions l'équation (1) par rapport à x_n, le résultat obtenu sera évidemment de la forme

$$(10) \qquad \sum a_{ik} p_{ikn} + l_1 = 0,$$

l_1 étant une fonction des x, de z et de ses dérivées premières et secondes seulement, quadratique par rapport aux dérivées secondes [1]. Si, dès lors, nous comparons le système des équations linéaires (9), (10) à celui des équations (1), (5), nous voyons qu'aux termes constants près, ils sont identiques, une fois chaque inconnue p_{ik} remplacée par p_{ikn}. Par conséquent, lorsqu'on exprimera ces dernières en fonction de p_{nnn} par le moyen des relations (9), l'équation en p_{nnn} sera

$$(11) \qquad A p_{nnn} + K_1 = 0$$

[1] l_1 sera même *linéaire* par rapport aux p_{ik}, si les a_{ik} sont indépendants des dérivées premières de z.

où

$$(11') \qquad K_1 = \sum{}' a_{ik}\left(\frac{dp_{in}}{dx_k} - P_k \frac{dp_{nn}}{dx_i}\right) + \sum{}' a_{ik} \frac{dp_{nn}}{dx_i} + l_1$$

est fonction des x_i, z, p_i, p_{ik}. La condition nécessaire et suffisante pour que les conditions (9) et (10) déterminent bien les dérivées troisièmes est donc encore $A \neq 0$.

Le calcul des dérivées quatrièmes, cinquièmes, etc., sera tout à fait analogue aux précédents. On aura, pour chaque ordre, une inconnue déterminée par une équation du premier degré dans laquelle le coefficient de cette inconnue sera toujours la même quantité A. Toutes ces inconnues seront donc bien déterminées sous la seule condition $A \neq 0$.

281. — On arriverait au même résultat par un changement de variable. Substituons, en effet, à x_n la nouvelle variable indépendante

$$x'_n = x_n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

La nouvelle équation de M_{n-1} sera $x'_n = 0$ et l'équation aux dérivées partielles rapportée à ce nouveau système de variables sera $\mathcal{F}' = 0$. On pourra calculer toutes les dérivées successives en fonction de z et de $\frac{\partial z}{\partial x'_n}$ si l'équation $\mathcal{F}' = 0$ est résoluble par rapport à la dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2_n}$.

Or, si l'on revient aux anciennes variables, il est évident, d'après ce qui précède, et facile à vérifier directement, que la condition

$$\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2_n}\right)} \neq 0$$

ainsi obtenue donne $A \neq 0$.

On retrouve donc bien ainsi la même conclusion que tout à l'heure. Mais, de plus, on en obtient une autre également très importante. On sait, en effet, d'après la démonstration de Mme Kowalewski, que si z et $\frac{\partial z}{\partial x'_n}$ sont pour $x'_n = 0$ des fonctions analytiques et régulières de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et que la fonction $\mathcal{F}'$ soit analytique et régulière par rapport aux quantités qui y figurent, le problème admettra une solution z analytique et régulière en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x'_n$. Ce résultat se transporte évidemment au système de variables donné. Autrement dit, les dérivées successives dont nous venons d'indiquer le calcul *sont les coefficients d'un développement*

le Taylor convergent pour des valeurs suffisamment p'tites des arg nents.

282. — Supposons maintenant que l'on ait, sur toute [1] l'hypersurf M_{n-1}, la relation

$$(12) \qquad A = 0.$$

Alors il faudra, pour que le problème soit possible, ou du moins pour qu existe une solution z admettant des dérivées de tous ordres sur M_{n-1}, q la série des valeurs données de z, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vérifie la condition K = laquelle peut encore s'écrire, en remplaçant les p_i par leurs valeurs fonction de p_n tirées de (4) [2]

$$(13)\ K = \sum' a_{ik}\left(\frac{d^2 z}{dx_i dx_k} - P_i\frac{dp_n}{dx_k} - P_k\frac{dp_n}{dx_i} - P_{ik}p_n\right) + \sum' a_{in}\frac{dp_n}{dx_i} + l =$$

283. — Si au contraire, on considère pour un instant une soluti *donnée* z de l'équation (1), la condition A = 0 est une équation à dérivées partielles du premier ordre par rapport à x_n, considéré com fonction de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}$. Les multiplicités (2) qui vérifient cette éq tion seront dites des *caractéristiques* de l'équation donnée.

Il importe de remarquer que, pour former les caractéristiques, il suffit pas, en général, de se donner l'équation (1) elle-même : les car ristiques ne sont définies que pour une intégrale déterminée de cette é tion, puisque les coefficients ne dépendent pas seulement des x, encore de z et de ses dérivées. Il n'y a d'exception que pour des équ de forme particulière, celles où les coefficients a_{ik} des termes du ordre sont fonctions des x seuls.

Comme équation du premier ordre, l'équation aux dérivées pa A = 0 admet elle-même des caractéristiques [3] qui ne sont plus d

---

[1] Nous ne traitons pas ici le cas où A est nul sur une partie seulemen (savoir, sur une multiplicité $n-2$ fois étendue appartenant à M_{n-1}) le pond à une singularité (comparer ch. IV, n° 233 si K est différent de nous retrouverons plus loin (n°s 316-318) lorsque K sera nul

[2] P_{ik} désigne, bien entendu, la dérivée $\frac{d^2 x_n}{dx_i dx_k}$.

[3] Voir Goursat, *Leçons sur l'int. [illegible]*

tiplicités $n - 1$ fois étendues, mais des *lignes* (multiplicités à une dimension), définies par les équations différentielles ordinaires

$$(14) \qquad \frac{dx_1}{\left(\frac{\partial A}{\partial P_1}\right)} = \frac{dx_2}{\left(\frac{\partial A}{\partial P_2}\right)} = \ldots\ldots = \frac{dx_{n-1}}{\left(\frac{\partial A}{\partial P_{n-1}}\right)} = ds.$$

lesquelles entraînent encore

$$(14') \qquad ds = \frac{dx_n}{P_1 \frac{\partial A}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} + \ldots P_{n-1} \frac{\partial A}{\partial P_{n-1}}}.$$

Ces lignes jouent également un rôle essentiel dans la théorie actuelle : nous les nommerons *bicaractéristiques* ou encore *rayons*, en raison d'une signification physique que nous leur reconnaîtrons un peu plus loin.

Toute hypersurface caractéristique M_{n-1} est un lieu de bicaractéristiques, une de ces lignes passant par chaque point de M_{n-1}.

284. — Les bicaractéristiques cesseraient d'être définies dans un cas que nous exclurons, au moins en ce moment : celui où $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ serait nul pour toutes les valeurs que peut prendre l'indice i.

Si l'on considérait $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ comme des coordonnées cartésiennes et l'équation (**12**) comme représentant une surface, ce cas correspondrait, comme on sait, à l'existence d'un point multiple sur la surface en question. Nous dirons, par analogie, que M_{n-1} est une *caractéristique multiple*, son ordre de multiplicité étant celui du point $(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})$ sur la surface (**12**).

285. — La condition (**13**) introduit déjà les bicaractéristiques. Le coefficient de $\frac{dp_n}{dx_i}$ dans cette équation est, en effet

$$(15) \qquad -\sum{}' a_{ik} P_k + a_{in} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial P_i} :$$

on peut poser

$$(15') \qquad \left\{ \begin{aligned} K &= -\frac{1}{2} \sum{}' \frac{dp_n}{dx_i} \frac{\partial A}{\partial P_i} + L, \\ L &= \sum{}' a_{ik} \left(\frac{d^2 z}{dx_i\, dx_n} - P_{ik} p_n \right) + l. \end{aligned} \right.$$

Si donc on donne tout d'abord la distribution des valeurs de z, sur la

multiplicité (2), celle-ci étant supposée caractéristique [1], la condition (13) donnera, pour déterminer p_n, une équation aux dérivées partielles linéaire dont les caractéristiques seront précisément les courbes (14).

286. — Revenons au problème de Cauchy en supposant $A = 0$ et la condition (13) également vérifiée. Alors l'équation (7) ne détermine plus p_{nn}. Mais ainsi qu'il arrive déjà dans le cas de deux variables, cette quantité ne peut pas être prise tout à fait arbitrairement. Pour $A = 0$, en effet, l'équation (11) est également impossible ou indéterminée et la condition de possibilité est

$$K_1 = 0.$$

Or si, sur l'expression (11') de K_1, on opère comme il a été fait sur celle de K, c'est-à-dire si l'on y remplace les p_{in} par leurs valeurs en fonction de p_{nn} tirée de (6), on trouvera évidemment

$$(16)\quad \begin{cases} 0 = K_1 = -\dfrac{1}{2}\sum{}' \dfrac{dp_{nn}}{dx_i}\dfrac{\delta A}{\delta P_i} + L_1, \\ L_1 = \sum{}' a_{ik}\left(\dfrac{d^2p_n}{dx_i\,dx_k} - P_{ik}\,p_{nn}\right) + l_1. \end{cases}$$

p_{nn}, considéré, sur la multiplicité M_{n-1}, comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfait donc à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Les caractéristiques de cette dernière équation ne sont autres que les bicaractéristiques situées sur M_{n-1}.

Si on désigne par ds la valeur commune des rapports (14) (s étant un paramètre qui définit un point variable de la bicaractéristique) l'équation (16) deviendra

$$\frac{dp_{nn}}{ds} - L_1 = 0,$$

c'est, comme on le voit, une équation différentielle du premier ordre en p_{nn} considéré comme fonction de s.

On ne peut donc se donner arbitrairement p_{nn} qu'en *un* point de chaque bicaractéristique : autrement dit, si sur M_{n-1} nous traçons une multiplicité M_{n-2} rencontrant chaque bicaractéristique en un point et en un seul p_{nn} sera arbitraire sur M_{n-2} seulement et non pas sur M_{n-1}.

---

[1] Toutefois, il faut observer que les caractéristiques ne peuvent pas être définies sans qu'on donne les p_i, à moins que les a_{ik} ne soient indépendants de ces quantités.

Une fois p_{nn} ainsi choisi, p_{nnn} sera déterminé non plus par l'équation (**11**), mais par les conditions relatives aux dérivées quatrièmes. Or, les équations qui déterminent celles-ci sont identiques à celles qui déterminent les dérivées troisièmes, à un terme près qui ne contient que des dérivées premières et secondes, moyennant le remplacement de p_{ik} par p_{ikn} et de p_{ikn} par p_{iknn}. Donc nous aurons pour p_{nnn}, considéré sur M_{n-1}, une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre dérivant de (**16**) par la même substitution, sauf le changement du terme où p_{nnn} n'est pas différentié (terme qui sera linéaire, et non plus quadratique, par rapport à p_{nnn}) : de sorte que p_{nnn} pourra, comme p_{nn}, être pris arbitrairement en un point de chaque bicaractéristique.

Il est clair que des considérations toutes semblables s'appliqueront aux dérivées suivantes de tous les ordres.

287. — Nous avons supposé l'équation de M_{n-1} résolue par rapport à x_n. Si cette équation était prise sous une forme quelconque

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{2'}$$

les dérivées partielles $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ de x_n par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ s'exprimeraient en fonction des dérivées partielles $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ de Π par rapport à $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$ à l'aide des formules

$$P_i = -\frac{\pi_i}{\pi_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{17}$$

de sorte que la quantité A qui doit être nulle pour que M_{n-1} soit caractéristique serait [1]

$$A = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\pi_i\pi_k. \tag{18}$$

On pourrait d'ailleurs faire cette substitution dans la série des calculs qui nous ont conduits à l'équation des caractéristiques. Considérons, par exemple, les relations (**5**) : moyennant la substitution (**17**), elles deviendront

$$\pi_n \frac{dp_k}{dx_i} = \pi_n p_{ik} - \pi_i p_{kn}. \tag{19}$$

---

(1) Cette nouvelle quantité A est égale à l'ancienne, multipliée par π_n^2.

Soit p_{ik}^0 un système déterminé de valeurs des p_{ik} vérifiant ces équations. Pour toute autre solution p_{ik}, on aura

$$(20)\qquad \pi_n(p_{ik}-p_{ik}^0)=\pi_i(p_{kn}-p_{kn}^0)\qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,n-1 \\ k=1,2,\dots,n \end{pmatrix}$$

d'où résulte

$$(20')\qquad p_{ik}=p_{ik}^0+\lambda\,\pi_i\pi_k\qquad (i,k=1,2,\dots,n)$$

λ étant un certain paramètre. Ces dernières formules représentent donc la solution générale des équations (**5**). En la substituant dans l'équation (**1**), on aura une équation du premier degré pour déterminer λ ; et le coefficient de λ sera précisément la quantité (**18**).

Quant aux bicaractéristiques, elles seront données par les équations

$$(14^{\text{bis}})\qquad \frac{dx_1}{\frac{\partial A}{\partial \pi_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial A}{\partial \pi_2}}=\dots=\frac{dx_{n-1}}{\frac{\partial A}{\partial \pi_{n-1}}}=\frac{dx_n}{\frac{\partial A}{\partial \pi_n}}$$

qui se déduisent de (**14**) et de (**14'**) par la substitution (**17**), en tenant compte de ce que la quantité (**18**) est homogène et, d'autre part, nulle sur la caractéristique.

288. — Il est évident que les raisonnements précédents s'étendent d'eux-mêmes à une équation d'un ordre quelconque, pourvu qu'elle soit linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé.

Il est également aisé de faire disparaître cette dernière restriction. Soit, par exemple, une équation du second ordre $\mathcal{F}=0$ non linéaire par rapport aux p_{ik}. Le problème qui consiste à déterminer une solution z de cette équation, connaissant les valeurs de z et de p_n sur M_{n-1}, peut être remplacé par le suivant : *trouver une solution de l'équation*

$$(21)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n}=0$$

connaissant, sur M_{n-1}, *ses valeurs, celles de ses dérivées et celles de ses dérivées secondes*, ces dernières données étant convenablement choisies : elles seront déterminées par les conditions (**5**) et l'équation $\mathcal{F}=0$. Toute fonction z qui répondra au premier problème répondra en effet au second. et d'autre part, si z satisfait à l'équation (**21**), $\mathcal{F}$ sera une fonction de

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ seuls et sera, par conséquent, partout nul s'il l'est pour $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Or, l'équation (**21**), qui est du troisième ordre, est linéaire par rapport aux dérivées troisièmes, le coefficient de p_{ikn} étant $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{ik}}$: elle admettra donc des caractéristiques données par l'équation

$$(22) \qquad \sum{}' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{ik}} P_i P_k - \sum{}' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{in}} P_i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{nn}} = 0$$

(ou

$$(22') \qquad \sum \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{ik}} \pi_i \pi_k = 0,$$

si l'équation de M_{n-1} est prise sous la forme (**2'**)) : autrement dit, par la condition que le déterminant fonctionnel de l'équation donnée et des relations (**5**) (ou (**20**)) par rapport aux p_{ik} s'annule. En un mot, les a_{ik} seront simplement remplacés ici par les quantités $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{ik}}$.

Seulement, on voit que, à l'égard de la théorie des caractéristiques, l'équation donnée se comportera comme une équation du troisième ordre, c'est-à-dire que les considérations du n° **286** ne s'appliqueront qu'à partir du calcul des dérivées troisièmes et non de celui des dérivées secondes, comme il arrivait dans le cas où l'équation donnée avait la forme (**1**).

Par exemple, nous ne pourrons plus en général, écrire la condition (**13**), mais seulement la condition (**16**), savoir

$$(16^{\text{bis}}) \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} \sum{}' \frac{dp_{nn}}{dx_i} \frac{\partial A}{\partial P_i} + L_1, \\ L_1 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} p_n + \sum \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \left(\frac{dp_n}{dx_i} - P_i p_{nn} \right) + \sum{}' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{ik}} \left(\frac{d^2 p_n}{dx_i dx_k} - P_{ik} p_{nn} \right), \end{cases}$$

A étant le premier membre de l'équation (**22**).

289. — Il est cependant un cas où, l'équation n'étant pas linéaire, il n'est pas nécessaire de la différencier préalablement pour lui appliquer la théorie précédente. C'est ce qui arrive, lorsque le nombre des variables indépendantes est de deux, pour les équations de Monge Ampère (équation (**17**) du n° **158**).

Pour n quelconque, la même circonstance se présente toutes les fois que le premier membre de l'équation est une fonction linéaire du déterminant

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

et de ses mineurs (¹).

C'est en particulier, ce qui a lieu pour toute équation que l'on déduit d'une équation de la forme (**1**) par une transformation de contact. Il était évident *a priori* (comparer ch. IV, n° **162**), que les conclusions précédentes devaient subsister pour une équation ainsi obtenue et même que *les caractéristiques et les bicaractéristiques sont conservées dans la transformation.*

290. — Ainsi que nous l'avons vu, pour le cas de deux variables, au n° **161**, la condition (**12**) est celle que doit vérifier M_{n-1} pour que deux intégrales de l'équation soient tangentes entre elles en tous les points de cette multiplicité, du moins tant que ce contact ne sera pas d'ordre infini.

Cette notion est, d'ailleurs, équivalente à celle de la propagation des ondes lorsque celle-ci s'applique à des mouvements qui peuvent être considérés comme ne dépendant que d'une seule fonction inconnue.

Considérons, par exemple, les mouvements d'un gaz qui dérivent d'un potentiel des vitesses Φ. Les composantes de la vitesse dépendent alors des dérivées premières de ce potentiel, et il en est de même de la pression d'après l'équation (²)

$$(28) \qquad V - \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Supposons que deux mouvements de cette espèce présentent entre eux une discontinuité d'ordre m ($m > 2$). Cet ordre sera aussi celui des premières dérivées du potentiel qui soient discontinues.

x, y, z, t, Φ étant considérés comme cinq coordonnées, chacun des deux mouvements sera représenté par une surface dans l'espace à cinq dimen-

(¹) Ces équations ont été étudiées d'une manière générale par M. Goursat (*Bull. Soc. Math. Fr.*, tome XXVII, p. 1-34 ; 1899).

(²) Voir par exemple Kirchhoff, *Mécanique*, 15ᵉ leçon.

sions, surfaces ayant entre elles un contact d'ordre m. Toutes deux devront d'ailleurs satisfaire à l'équation différentielle du mouvement, savoir (1)

$$(23') \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$$

où ρ doit être remplacé par sa valeur tirée de (**23**).

La multiplicité de contact

$$(24) \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0$$

devra donc être une caractéristique de cette équation. Or, dans celle-ci, les termes du second ordre sont

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \Phi - \frac{dp}{d\rho}\Delta\Phi$$

de sorte qu'on devra avoir

$$(25) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{dp}{d\rho}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Cette équation est équivalente à la formule (**5**) (n° **240**) qui fait connaître la vitesse de déplacement de l'onde.

Les raisonnements mêmes par lesquels nous avons obtenu ces deux formules sont d'ailleurs analogues les uns aux autres, quoique cette analogie ne puisse nous apparaître complètement tant que nous n'introduisons que le potentiel des vitesses au lieu des trois coordonnées x, y, z considérées comme fonction de a, b, c, t. Considérons, par exemple, les équations (**20**) ou (**20'**) : elles expriment que, pour deux intégrales qui se raccordent suivant la multiplicité (**2'**) avec identité des dérivées premières, les différences des dérivées secondes sont entre elles comme les carrés et les produits deux à deux des dérivées partielles du premier membre de (**2'**). Ce fait n'est autre que celui que nous avons établi au n° **97** (2).

(1) Kirchhoff, *loc. cit.*

(2) Toutefois, la théorie des caractéristiques ne dispense pas du lemme du n° **72**, lemme qui a été implicitement admis dans ce que nous venons de dire.

291. — Pour appliquer la théorie des caractéristiques à l'étude du mouvement le plus général des gaz, il est nécessaire de l'étendre au cas des systèmes d'équations, le nombre de celles-ci étant supposé égal à celui des fonctions inconnues : cas auquel le théorème de Cauchy et de Mme Kowalewsky continue à s'appliquer, du moins lorsque, d'une part, on suppose toutes les données analytiques, et que, de l'autre, on exclut certains cas exceptionnels (ceux où il est impossible de résoudre par rapport à des dérivées d'ordre le plus élevé appartenant respectivement aux diverses fonctions cherchées) lesquels n'interviennent pas dans les problèmes dont nous nous occupons.

Rappelons que, contrairement à ce qui se passe pour les équations différentielles ordinaires, le cas de plusieurs équations aux dérivées partielles à un nombre égal de fonctions inconnues est essentiellement distinct de celui d'une seule équation. Il est impossible de ramener l'un à l'autre en éliminant une ou plusieurs inconnues : on n'obtiendrait pas ainsi, en effet, une équation unique pour déterminer l'inconnue restante, mais un système d'équations dont la discussion, au point de vue de l'existence et de la recherche de leurs solutions communes, serait, en général, plus compliquée que celle du système primitif.

Nous prendrons, pour fixer les idées, le cas qui se présente le plus communément en Mécanique, celui de trois équations à trois inconnues ξ, η, ζ et nous supposerons encore les équations du second ordre et linéaires par rapport aux dérivées secondes p_{ik} de ξ, aux dérivées secondes q_{ik} de η et aux dérivées secondes r_{ik} de ζ. Elles s'écriront donc

$$(26)\qquad \begin{cases} \sum a_{ik}p_{ik} + \sum b_{ik}q_{ik} + \sum c_{ik}r_{ik} + l = 0 \\ \sum a'_{ik}p_{ik} + \sum b'_{ik}q_{ik} + \sum c'_{ik}r_{ik} + l' = 0 \\ \sum a''_{ik}p_{ik} + \sum b''_{ik}q_{ik} + \sum c''_{ik}r_{ik} + l'' = 0 \end{cases}$$

où a_{ik}, a'_{ik}, ..., c_{ik}, c'_{ik}, c''_{ik} ; l, l', l'' dépendent des fonctions inconnues, de leurs dérivées premières (celles de ξ étant désignées par $p_1, p_2, \ldots, p_n$, celles de η par $q_1, q_2, \ldots, q_n$, celles de ζ par $r_1, r_2, \ldots, r_n$) et des variables indépendantes qui sont toujours les x.

Nous considérerons encore la multiplicité M_{n-1}, sur laquelle nous supposerons données les valeurs de ξ, η, ζ et des dérivées premières (ou, plus exactement de p_n, q_n, r_n). Les q_{ik}, r_{ik} vérifiant des équations toutes semblables à (6), (6'), on pourra appliquer aux termes qui les contiennent les

transformations que nous avons faites aux nos **279**, **282**, et les équations données prendront par conséquent la forme (comparer (7), (15))

$$(27)\quad \begin{cases} \mathrm{A}p_{nn} + \mathrm{B}q_{nn} + \mathrm{C}r_{nn} - \sum' \frac{1}{2}\frac{dp_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{P}_i} - \sum' \frac{1}{2}\frac{dq_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{P}_i} \\ \qquad - \sum' \frac{1}{2}\frac{dr_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{P}_i} + \mathrm{L} = 0 \\ \mathrm{A}'p_{nn} + \mathrm{B}'q_{nn} + \mathrm{C}'r_{nn} - \sum' \frac{1}{2}\frac{dp_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial \mathrm{P}_i} - \sum' \frac{1}{2}\frac{dq_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial \mathrm{P}_i} \\ \qquad - \sum' \frac{1}{2}\frac{\partial r_n}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \mathrm{P}_i} + \mathrm{L}' = 0 \\ \mathrm{A}''p_{nn} + \mathrm{B}''q_{nn} + \mathrm{C}''r_{nn} - \sum' \frac{1}{2}\frac{dp_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{A}''}{\partial x_i} - \sum' \frac{1}{2}\frac{dq_n}{dx_i}\frac{\partial \mathrm{B}''}{\partial \mathrm{P}_i} \\ \qquad - \sum' \frac{1}{2}\frac{\partial r_n}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \mathrm{P}_i} + \mathrm{L}'' = 0 \end{cases}$$

où A, B, C désignent les quantités

$$\mathrm{A} = \sum' a_{ik}\mathrm{P}_i\mathrm{P}_k - \sum' a_{in}\mathrm{P}_i + a_{nn}$$

$$\mathrm{B} = \sum' b_{ik}\mathrm{P}_i\mathrm{P}_k - \sum' b_{in}\mathrm{P}_i + b_{nn}$$

$$\mathrm{C} = \sum' c_{ik}\mathrm{P}_i\mathrm{P}_k - \sum' c_{in}\mathrm{P}_i + c_{nn},$$

tandis que A′, B′, C′, A″, B″, C″ sont des quantités tout analogues formées avec la seconde et la troisième équations, et que

$$(28)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = \sum' a_{ik}\left(\frac{d^2\xi}{dx_i\,dx_k} - \mathrm{P}_{ik}p_n\right) + \sum' b_{ik}\left(\frac{d^2\eta}{dx_i dx_k} - \mathrm{P}_{ik}q_n\right) \\ \qquad + \sum' c_{ik}\left(\frac{d^2\zeta}{dx_i\,dx_k} - \mathrm{P}_{ik}r_n\right) + l \end{cases}$$

ainsi que les quantités analogues L′, L″, sont des fonctions de p_n, q_n, r_n et de la distribution des valeurs de ξ, η, ζ sur M_{n-1}.

Dès lors, la condition pour que la recherche des dérivées secondes soit un problème impossible ou indéterminé est

$$(29)\qquad \mathrm{H} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'' & \mathrm{B}'' & \mathrm{C}'' \end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi, comme on voit, une équation aux dérivées partielles du premier ordre, mais du sixième degré.

292. — Plaçons-nous d'abord, dans le cas le plus général, celui où la multiplicité M_{n-1} étant *caractéristique*, c'est-à-dire vérifiant l'équation $H = 0$, les mineurs du déterminant H ne sont pas nuls à la fois en un point quelconque de cette multiplicité. Alors la condition pour que le système soit indéterminé (et non impossible) par rapport à p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} est unique, savoir une certaine équation de la forme

$$(30) \qquad \sum{}' \left(\lambda_i \frac{dp_n}{dx_i} + \mu_i \frac{dq_n}{dx_i} + \nu_i \frac{dr_n}{dx_i}\right) + \sigma = 0,$$

linéaire par rapport aux dérivées de p_n, q_n, r_n, prises sur M_{n-1}.

On peut donc, cette fois, choisir arbitrairement, en chaque point de M_{n-1}, deux des trois dérivées premières p_n, q_n, r_n et déterminer la troisième par cette condition. Mais ici les caractéristiques de l'équation linéaire du premier ordre ainsi obtenue ne seraient nullement les analogues des bicaractéristiques définies tout à l'heure dans le cas d'une seule équation. Elles ne coïncideraient pas avec les lignes que nous allons rencontrer dans le calcul des dérivées troisièmes et qui, elles, seront les véritables bicaractéristiques. Au reste, les caractéristiques de l'équation en r_n ne seraient pas les mêmes que celles de l'équation en p_n ou en q_n.

En un mot, tant qu'on s'arrête aux dérivées secondes, le calcul se présente d'une manière très différente, suivant qu'il s'agit d'une ou de plusieurs équations.

293. — La condition (30) étant supposée vérifiée, la solution du système (27) sera indéterminée. Si $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ sont les mineurs de H relatifs aux éléments A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' respectivement, α étant par exemple, supposé différent de 0, toutes les solutions de ce système seront comprises dans la formule

$$(31) \qquad \begin{cases} p_{nn} = p^0_{nn} + \alpha\rho \\ q_{nn} = q^0_{nn} + \beta\rho \\ r_{nn} = r^0_{nn} + \gamma\rho \end{cases}$$

p^0_{nn}, q^0_{nn}, r^0_{nn}) étant l'une d'elles et ρ un paramètre arbitraire.

Passons aux dérivées troisièmes. D'après les calculs précédemment

effectués, il suffira de trouver p_{nnn}, q_{nnn}, r_{nnn}, lesquels seront donnés par les équations

$$(32)\quad \begin{cases} A p_{nnn} + B q_{nnn} + C r_{nnn} - \sum' \frac{1}{2} \frac{dp_{nn}}{dx_i} \frac{dA}{dP_i} - \sum' \frac{1}{2} \frac{dq_{nn}}{dx_i} \frac{\partial B}{\partial P_i} \\ \qquad - \sum' \frac{1}{2} \frac{dr_{nn}}{dx_i} \frac{\partial C}{\partial P_i} + L_1 = 0, \\ A' p_{nnn} + B' q_{nnn} + C' r_{nnn} - \sum' \frac{1}{2} \frac{dp_{nn}}{dx_i} \frac{\partial A'}{\partial P_i} - \sum' \frac{1}{2} \frac{dq_{nn}}{dx_i} \frac{\partial B'}{\partial P_i} \\ \qquad - \sum' \frac{1}{2} \frac{dr_{nn}}{dx_i} \frac{\partial C'}{\partial P_i} + L'_1 = 0, \\ A'' p_{nnn} + B'' q_{nnn} + C'' r_{nnn} - \sum' \frac{1}{2} \frac{dp_{nn}}{dx_i} \frac{\partial A''}{\partial P_i} - \sum' \frac{1}{2} \frac{dq_{nn}}{dx_i} \frac{\partial B''}{\partial x_i} \\ \qquad - \sum' \frac{1}{2} \frac{dr_{nn}}{dx_i} \frac{\partial C''}{\partial P_i} + L''_1 = 0. \end{cases}$$

L_1, L'_1, L''_1 désignant de nouveaux termes quadratiques en p_{nn}, q_{nn}, r_{nn}, à coefficients connus. La condition de possibilité de ce système s'obtient en multipliant la première équation par α, la seconde par α', la troisième par α'' ; il vient ainsi, p_{nnn}, q_{nnn} et r_{nnn} disparaissant du résultat,

$$(32')\quad \begin{cases} \sum' \frac{1}{2} \frac{dp_{nn}}{dx_i} \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial P_i} + \alpha' \frac{\partial A'}{\partial P_i} + \alpha'' \frac{\partial A''}{\partial P_i} \right) \\ + \sum' \frac{1}{2} \frac{dq_{nn}}{dx_i} \left(\alpha \frac{\partial B}{\partial P_i} + \alpha' \frac{\partial B'}{\partial P_i} + \alpha'' \frac{\partial B''}{\partial P_i} \right) \\ + \sum' \frac{1}{2} \frac{dr_{nn}}{dx_i} \left(\alpha \frac{\partial C}{\partial P_i} + \alpha' \frac{\partial C'}{\partial P_i} + \alpha'' \frac{\partial C''}{\partial P_i} \right) \\ - (\alpha L_1 + \alpha' L'_1 + \alpha'' L''_1) = 0. \end{cases}$$

Dans cette équation, nous avons à substituer les valeurs de p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} données par les formules (31). Il est clair que nous obtenons ainsi, pour déterminer ρ, une équation linéaire (non homogène) aux dérivées partielles du premier ordre en ρ, le coefficient de $\frac{d\rho}{dx_i}$ étant

$$\frac{1}{2} \alpha \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial P_i} + \alpha' \frac{\partial A'}{\partial P_i} + \alpha'' \frac{\partial A''}{\partial P_i} \right) + \frac{1}{2} \beta \left(\alpha \frac{\partial B}{\partial P_i} + \alpha' \frac{\partial B'}{\partial P_i} + \alpha'' \frac{\partial B''}{\partial P_i} \right) + \frac{1}{2} \gamma \left(\alpha \frac{\partial C}{\partial P_i} + \alpha' \frac{\partial C'}{\partial P} + \alpha'' \frac{\partial C''}{\partial P_i} \right).$$

Mais, d'après des identités bien connues, la condition $H = 0$ entraîne

$$\beta\alpha' = \alpha\beta', \quad \beta\alpha'' = \alpha\beta'', \quad \gamma\alpha' = \alpha\gamma', \quad \gamma\alpha'' = \alpha\gamma''.$$

Nous pouvons donc mettre α en facteur et le coefficient de $\frac{1}{2}\alpha$, savoir

$$\alpha\frac{\delta A}{\delta P_i}+\alpha'\frac{\delta A'}{\delta P_i}+\alpha''\frac{\delta A''}{\delta P_i}+\beta\frac{\delta B}{\delta P_i}+\beta'\frac{\delta B'}{\delta P_i}+\beta''\frac{\delta B''}{\delta P_i}+\gamma\frac{\delta C}{\delta P_i}+\gamma'\frac{\delta C'}{\delta P_i}+\gamma''\frac{\delta C''}{\delta P_i},$$

n'est autre que $\frac{\delta H}{\delta P_i}$.

Donc les caractéristiques de l'équation en ρ sont

$$(33)\qquad \frac{dx_1}{\frac{\delta H}{\delta P_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\delta H}{\delta P_2}}=\dots=\frac{dx_{n-1}}{\frac{\delta H}{\delta P_{n-1}}},$$

autrement dit, sont identiques à celles de l'équation (**29**).

On retrouvera évidemment ces mêmes lignes dans le calcul des dérivées des ordres suivants. Ce sont elles que nous appellerons les bicaractéristiques du système donné.

291. — Le cas que nous venons de traiter est celui des équations de l'Hydrodynamique, du moins en ce qui concerne les discontinuités propageables.

Tout d'abord, en effet, il est clair, comme précédemment, que la multiplicité S_0 qui exprime, comme il a été expliqué au n° **96**, la propagation d'une onde avec le temps, est nécessairement une caractéristique du système des équations du mouvement.

D'autre part, si deux mouvements d'une masse aérienne se propagent l'un dans l'autre suivant une onde, nous savons que la discontinuité qui existe entre eux est normale à cette onde en chaque point. Si donc on donne l'un des mouvements, les valeurs des dérivées secondes pour l'autre ne dépendront, en chaque point, que d'une seule inconnue, à savoir la grandeur de la discontinuité en question. Ceci revient à dire que la résolution du système (**27**) ne comporte qu'une inconnue arbitraire et, par conséquent, que l'un au moins des mineurs du déterminant H est différent de zéro.

Si nous prenons les équations de l'Hydrodynamique sous la forme d'Euler, les variables indépendantes étant les coordonnées actuelles x, y, z et le temps t, l'équation de M_{n-1} devra être écrite sous la forme

$$\varphi(x, y, z, t)=0.$$

L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfera la fonction φ et qui

donnera $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ en fonction de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, fera ainsi connaître la vitesse de déplacement de l'onde. Effectivement, si on forme le déterminant H pour les équations d'Euler, qui sont quatre équations du premier ordre à quatre inconnues u, v, w, ρ, on retombera sur l'équation (**25**), multipliée par le facteur $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$ (lequel correspond aux ondes stationnaires, dont nous reparlerons plus loin).

Si, au contraire, nous prenons les variables de Lagrange, l'équation de M_{n-1} étant résolue par rapport à t, soit

$$t = f(a, b, c) \tag{34}$$

l'équation des caractéristiques nous donnera la vitesse de propagation

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{f_a^2 + f_b^2 + f_c^2}} \tag{35}$$

rapportée à l'état initial considéré. Nous retomberons donc ainsi sur la formule (**4**) du n° **240** ; et, en effet, les calculs précédents, appliqués aux équations (**1**) et (**3**) du ch. III, donnent [1], conformément à la formule en question et à la relation (**35**),

$$\frac{1}{D^2}\frac{dp}{d\rho}\,\Phi\,(f_a, f_b, f_c) - 1 = 0. \tag{29'}$$

Si l'équation de M_{n-1} est prise sous la forme

$$f(a, b, c, t) = 0 \tag{34'}$$

non résolue par rapport à t, on obtiendra la même équation (au remplacement près du second terme par f_t^2) multipliée par le facteur f_t^2, correspondant encore aux ondes stationnaires.

295. — On voit d'ailleurs bien, dans ces conditions, que les calculs par lesquels on parvient au résultat ne sont pas distincts de ceux qui ont été faits au chap. V. On devra, en effet, écrire pour l'inconnue x des équations du type (**20'**) et, pour y et z, des équations analogues où le paramètre λ

[1] On devra, à cet effet, exprimer (comme nous l'avons dit au n° **124**) les dérivées $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ à l'aide des dérivées par rapport à a, b, c, et, d'autre part, tenir compte de la remarque faite dans la note de la page 92.

sera remplacé par μ ou ν. Or, il apparaît immédiatement qu'on obtient ainsi les *conditions cinématiques de compatibilité* qui ont fait l'objet du chap. II et que nous avons adjointes aux équations dynamiques du mouvement [1].

296. — On obtiendra la valeur de la vitesse de propagation telle que la donne la formule (3) (n° **230**) en prenant pour état initial l'état actuel : de plus, la forme $\Phi\ (f_a, f_b, f_c)$ qui figure dans la formule (29') se réduisant alors à $f_a^2 + f_b^2 + f_c^2$, nous avons immédiatement à l'instant considéré, la tangente à la bicaractéristique, savoir :

$$\frac{da}{f_a} = \frac{db}{f_b} = \frac{dc}{f_c} = \frac{dt}{\sqrt{\frac{dp}{d\rho}(f_a^2 + f_b^2 + f_c^2)}};$$

ainsi *la bicaractéristique, rapportée à un état initial coïncidant avec l'état actuel à l'instant et au point considérés, est normale à l'onde.*

297. — Si, des équations de l'Hydrodynamique, nous passons à celles de l'Elasticité, nous pourrons également appliquer les considérations précédentes, du moins lorsque les coefficients d'élasticité seront tout à fait quelconques. En général, en effet, les directions de discontinuités compatibles avec une surface d'onde déterminée sont en nombre fini, égal à trois, chacune d'elles correspondant à une vitesse de propagation différente : autrement dit, lorsqu'on donne la multiplicité caractéristique S_0 qui représente la propagation de l'onde, la direction de la discontinuité est déterminée. Nous pouvons donc raisonner comme nous l'avons fait au commencement du n° **291**.

298. — Il en est autrement dans le cas d'un corps isotrope, la déformation étant supposée infiniment petite. Nous avons vu, en effet, que, dans un tel corps, la vitesse de propagation n'a que deux valeurs possibles (au lieu de trois). La première correspond à des ondes longitudinales, auxquelles s'applique ce que nous avons dit jusqu'ici. L'autre, au contraire,

---

[1] Il est cependant à remarquer que les considérations des chap. II-V ne donnent pas l'interprétation de la forme que présentent les termes tout connus (indépendants des p.) et ne permettent pas, par conséquent, de retrouver les équations dans lesquelles ces termes interviennent, telles que l'équation (30) (n° **292**). Il y a là une lacune sans doute intéressante à combler.

égale (avec les notations du n° **260**) à $\frac{M}{\rho}$, convient à des ondes transversales, et *une discontinuité transversale quelconque peut être ainsi propagée.* Autrement dit, si nous considérons les équations (5) du n° **260**, équations dont le déterminant est

$$(36)\quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \rho\theta^2 - M - (L+M)\alpha^2 & -(L+M)\alpha\beta & -(L+M)\alpha\gamma \\ -(L+M)\alpha\beta & \rho\theta^2 - M - (L+M)\beta^2 & -(L+M)\beta\gamma \\ -(L+M)\alpha\gamma & -(L+M)\beta\gamma & \rho\theta^2 - M - (L+M)\gamma^2 \end{vmatrix} \\ \qquad = -(\rho\theta^2 - M)^2 \,(L + 2M - \rho\theta^2), \end{array} \right.$$

le facteur $\rho\theta^2 - M$ *sera commun à ce déterminant et à tous ses mineurs.*

D'ailleurs, ainsi qu'il résulte évidemment des développements qui précèdent, — et qu'on le vérifie d'ailleurs immédiatement — si, dans ces équations linéaires, on remplace les inconnues λ, μ, ν par $\frac{\delta^2\xi}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2\eta}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2\zeta}{\delta t^2}$ et les quantités α, β, γ, θ par

$$\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},$$

les équations ainsi obtenues ne seront autres, aux termes indépendants des inconnues près, que celles auxquelles on arriverait en reportant dans les équations mêmes du mouvement (équations (4) du n° **250**) les valeurs des dérivées secondes tirées de (6), (6′), c'est-à-dire que les équations (28) (l'équation de l'onde étant $t = f(x, y, z)$).

On voit donc, que sur les ondes transversales qui se propagent dans les corps élastiques isotropes, le déterminant H est nul *ainsi que tous ses mineurs.* Il en est évidemment de même pour les ondes transversales stationnaires de l'Hydrodynamique, ainsi qu'on s'en assurerait en effectuant les calculs du n° **294** sans exclure ces ondes, c'est-à-dire sur l'équation (**34′**) et non sur l'équation résolue par rapport à t.

299. — Il est donc nécessaire d'étudier, à leur tour, les systèmes pour lesquels cette circonstance se présente.

Nous nous trouvons, alors, dans un cas précédemment exclu (n° **284**) même pour l'étude d'une seule équation : celui d'une caractéristique multiple. Il est clair, en effet, que toutes les quantités $\frac{\partial H}{\partial P_i}$ sont nulles [1].

---

[1] C'est ainsi que, dans l'expression (36), le facteur $\rho\theta^2 - M$ figure au carré.

Sur une caractéristique multiple, les théories précédentes sont, en général, en défaut. Mais il en est autrement si cette caractéristique annule tous les mineurs du déterminant H et si son *rang*, c'est-à-dire le nombre de lignes et de colonnes qu'il faut supprimer dans le déterminant en question pour trouver un mineur différent de zéro, est égal à son ordre de multiplicité. C'est ce qui est établi, pour le cas de deux variables indépendantes, dans l'ouvrage cité de M. Goursat [1].

Nous retrouverons plus loin (n° **327**) l'équivalent, pour le cas de n quelconque, du résultat ainsi obtenu. Mais, pour notre objet actuel, nous serons obligés de faire une hypothèse de plus.

Dans le cas envisagé au n° précédent, en effet, les caractéristiques doubles ont le même degré de généralité que les autres : elles sont définies, comme elles, par une *une seule* équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous nous bornerons au cas, évidemment très particulier, où cette condition est vérifiée : plus exactement, où tous les mineurs du déterminant H s'annulent, non seulement sur la caractéristique considérée, mais sur toutes les caractéristiques infiniment voisines de la première.

Reprenons donc le système d'équations et le système (**27**) en p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} qui en est la conséquence et supposons que, le déterminant H soit nul avec tous ses mineurs, cette circonstance ayant lieu, non seulement sur M_{n-1}, mais sur toutes les caractéristiques voisines.

Le système (**27**) aura alors deux conditions de possibilité, mais si elles sont vérifiées, les trois équations qu'il renferme se réduiront à une seule qui déterminera r_{nn}, par exemple, en fonction de p_{nn} et de q_{nn} : on aura, à un terme connu près

$$r_{nn} = -\frac{A}{C}p_{nn} - \frac{B}{C}q_{nn}.$$

Les équations (**32**) auront également deux conditions de possibilité que nous obtiendrons, par exemple, en multipliant la première d'entre elles par C', la troisième par $-C$ et ajoutant, puis, opérant de même avec les deux dernières et les coefficients C'', $-C'$. Nous trouverons ainsi

$$\sum{}' \frac{1}{2}\left(C'\frac{\partial A}{\partial P_i} - C\frac{\partial A'}{\partial P_i}\right)\frac{dp_{nn}}{dx_i} + \sum{}' \frac{1}{2}\left(C'\frac{\partial B}{\partial P_i} - C\frac{\partial B'}{\partial P_i}\right)\frac{dq_{nn}}{dx_i}$$
$$+ \sum{}' \frac{1}{2}\left(C'\frac{\partial C}{\partial P_i} - C\frac{\partial C'}{\partial P_i}\right)\frac{dr_{nn}}{dx_i} + CL'_i - C'L_i = 0,$$

[1] *Equations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, note II.

$$\sum{}' \frac{1}{2}\left(C''\frac{\partial A'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial A''}{\partial P_i}\right)\frac{dp_{nn}}{dx_i} + \sum{}' \frac{1}{2}\left(C''\frac{\partial B'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial B''}{\partial P_i}\right)\frac{dq_{nn}}{dx_i}$$
$$+ \sum{}' \frac{1}{2}\left(C''\frac{\partial C'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right)\frac{dr_{nn}}{dx_i} + C'L''_1 - C''L'_1 = 0$$

(les dérivées troisièmes s'éliminant en vertu des relations

(37) $$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \beta = \beta' = \beta'' = \gamma = \gamma' = \gamma'' = 0).$$

Si nous substituons à r_{nn} sa valeur en fonction de p_{nn}, q_{nn}, nous aurons pour ceux-ci les deux équations aux dérivées partielles

(38) $$\left\{\begin{aligned} &\sum{}' \frac{1}{2}\left[C''\frac{\partial A}{\partial P_i} - C\frac{\partial A''}{\partial P_i} - \frac{A}{C}\left(C''\frac{\partial C}{\partial P_i} - C\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right)\right]\frac{dp_{nn}}{dx_i} \\ &+ \sum{}' \frac{1}{2}\left[C''\frac{\partial B}{\partial P_i} - C\frac{\partial B''}{\partial P_i} - \frac{B}{C}\left(C''\frac{\partial C}{\partial P_i} - C\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right)\right]\frac{dq_{nn}}{dx_i} + \dots = 0, \\ &\sum{}' \frac{1}{2}\left[C''\frac{\partial A'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial A''}{\partial P_i} - \frac{A}{C}\left(C''\frac{\partial C'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right)\right]\frac{dp_{nn}}{dx_i} \\ &+ \sum{}' \frac{1}{2}\left[C''\frac{\partial B'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial B''}{\partial P_i} - \frac{B}{C}\left(C''\frac{\partial C'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right)\right]\frac{dq_{nn}}{dx_i} + \dots = 0 \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles nous avons remplacé par des points tous les termes qui ne contiennent pas les dérivées de p_{nn}, q_{nn}, termes dont la forme ne nous importe pas actuellement.

300.— Ces équations sont, en apparence, de forme beaucoup plus compliquée que les précédentes puisque nous sommes en présence de deux équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues p_{nn}, q_{nn}. Cependant, comme les premières, elles se réduisent à des équations différentielles ordinaires.

Si, en effet, nous tenons compte de la relation $AC'' = CA''$, le coefficient de $\frac{dp_{nn}}{dx_i}$, dans la première d'entre elles, s'écrit

$$\frac{1}{2}\left(C''\frac{\partial A}{\partial P_i} - C\frac{\partial A''}{\partial P_i} - A''\frac{\partial C}{\partial P_i} + A\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right).$$

Or ceci n'est autre que $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_i}(AC'' - CA'') = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial P_i}$.

De même, le coefficient de $\frac{dp_{nn}}{dx_i}$, dans la seconde équation (38), est

$$\frac{1}{2}\left(C''\frac{\partial A'}{\partial P_i} - C'\frac{\partial A''}{\partial P_i} - A''\frac{\partial C'}{\partial P_i} - A'\frac{\partial C''}{\partial P_i}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial P_i}.$$

(puisque l'on a également $AC' = CA'$) ; pendant que les coefficients analogues de $\frac{dq_{nn}}{dx_i}$ sont $-\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha'}{\partial P_i}, \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial P_i}$.

Or nous avons supposé que les relations (37) avaient lieu, non seulement sur M_{n-1}, mais sur toutes les caractéristiques infiniment voisines. Ceci exige évidemment que les expressions α, α', ..., qui sont des polynômes en $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$, aient un facteur commun H_1, les caractéristiques en question étant représentées par l'équation $H_1 = 0$. Nous pourrons donc poser

$$\alpha = H_1\mathcal{A}, \quad \alpha' = H_1\mathcal{A}', \quad \alpha'' = H_1\mathcal{A}'', \quad \beta = H_1\mathcal{B}, \quad \beta' = H_1\mathcal{B}', \quad \beta'' = H_1\mathcal{B}'',$$
$$\gamma = H_1\mathcal{C}, \quad \gamma' = H_1\mathcal{C}', \quad \gamma'' = H_1\mathcal{C}''$$

et nous supposerons que les quantités $\mathcal{A}$, ..., $\mathcal{C}''$ ne s'annulent pas toutes à la fois en un point quelconque de notre caractéristique.

H_1 étant nul, la dérivée $\frac{\partial\beta'}{\partial P_i}$ se réduit à $\mathcal{B}'\frac{\partial H_1}{\partial P_i}$ et une réduction analogue a lieu pour $\frac{\partial\beta''}{\partial P_i}, \frac{\partial\alpha'}{\partial P_i}, \frac{\partial\alpha''}{\partial P_i}$. Nos équations s'écrivent alors

$$\frac{\mathcal{B}'}{2}\sum{}' \frac{\partial H_1}{\partial P_i}\frac{dp_{nn}}{dx_i} - \frac{\mathcal{A}'}{2}\sum{}' \frac{\partial H_1}{\partial P_i}\frac{dq_{nn}}{dx_i} + ... = 0$$
$$-\frac{\mathcal{B}}{2}\sum{}' \frac{\partial H_1}{\partial P_i}\frac{dp_{nn}}{dx_i} + \frac{\mathcal{A}}{2}\sum{}' \frac{\partial H_1}{\partial P_i}\frac{dq_{nn}}{dx_i} + ... = 0.$$

Si donc nous considérons sur M_{n-1}, les lignes définies par les équations différentielles

$$(39) \qquad \frac{dx_1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H_1}{\partial P_2}} = ... = \frac{dx_{n-1}}{\frac{\partial H_1}{\partial P_{n-1}}} = ds$$

(s étant un paramètre auxiliaire), nous pourrons écrire nos équations sous la forme

$$\mathcal{B}'\frac{dp_{nn}}{ds} - \mathcal{A}'\frac{dq_{nn}}{ds} + ... = 0$$
$$-\mathcal{B}\frac{dp_{nn}}{ds} + \mathcal{A}\frac{dq_{nn}}{ds} + ... = 0.$$

Ce sont deux équations différentielles ordinaires définissant p_{nn} et q_{nn} en fonction de s. Nous trouvons donc les mêmes conclusions générales que tout à l'heure. Nous pourrons choisir arbitrairement les valeurs de p_{nn}, q_{nn} en un point de chacune des lignes définies par les équations

différentielles (**39**), après quoi ces quantités seront déterminées sur toute la ligne en question. Ce seront ces lignes que nous nommerons encore les *bicaractéristiques* du système.

Dans le cas des ondes transversales qui se propagent dans les solides isotropes, ces bicaractéristiques seront encore normales aux ondes, puisque l'équation des caractéristiques s'écrit

$$H_1 = \rho f_t^2 - M(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) = 0.$$

301. — D'après ce qui a été dit au n° **288**, il est clair que tous ces résultats (tant ceux des n^{os} **291**-**293**, que ceux que nous venons d'obtenir), subsisteraient dans ce qu'ils ont d'essentiel si les équations données n'étaient pas linéaires par rapport aux p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}. Il suffirait encore de différentier une fois ces équations par rapport à x_n. Les quantités a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} seraient remplacées par les dérivées des premiers membres relativement à p_{ik}, q_{ik} ou r_{ik}.

Il est clair, également, que, si l'équation de M_{n-1} était considérée sous la forme (**2'**), non résolue par rapport à x_n, les caractéristiques seraient encore données par l'équation (**29**), A étant remplacé par l'expression (**18**) (n° **287**) ; A', A'', ... par des expressions analogues ; et que les bicaractéristiques seraient représentées (dans l'hypothèse du n° **292**) par les équations

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial \pi_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial \pi_n}}.$$

302. — Revenons à l'interprétation dynamique des résultats que nous venons d'obtenir.

Nous adopterons pour représenter nos raisonnements, la convention dont nous avons parlé au n° **100** bis, c'est-à-dire que nous tracerons les figures correspondantes comme s'il s'agissait de mouvements plans, les surfaces de discontinuité étant remplacées sur les figures par des courbes, les multiplicités triplement étendues par des surfaces, etc.

Soient considérés deux mouvements en discontinuité du second ordre (ou d'ordre $m \geqslant 2$), suivant une surface dont la portion représentée sur l'état initial, sera désignée par S_0, et qui doivent satisfaire à un même système d'équations dynamiques, par exemple aux équations de l'hydrodynamique. Supposons qu'on donne à un instant donné t_0, la position de la surface S_0. Les considérations du chapitre V nous apprennent à trouver à cet instant, en tous les points de cette surface, la vitesse de

propagation ou, ce qui revient au même (n° **100** bis), l'angle de l'hypersurface S_0, lieu de S_0 lorsque le temps varie, avec l'hypersurface $t = t_0$: par conséquent, à construire en ce point la direction de S_0. D'après ce qui a été vu au chap. V et au chap. VI (n° **269-271**), cette direction est toujours réelle dans le cas des équations de l'hydrodynamique ou de l'élasticité. Il peut en exister deux ou plusieurs différentes, entre lesquelles les conditions de compatibilité permettront de choisir ainsi qu'il a été expliqué au n° **243**.

303. — Mais les considérations développées dans le présent chapitre permettent d'aller beaucoup plus loin. Si en effet, l'un des deux mouvements est complètement connu, celui vers l'intérieur duquel a lieu la propagation, nous connaîtrons une équation aux dérivées partielles du premier ordre (celle des caractéristiques) à laquelle devra satisfaire S_0.

Or, d'après la théorie générale des équations aux dérivées partielles [1], une telle équation, jointe à la condition de passer par la surface S_0, détermine complètement l'hypersurface en question.

Pour opérer effectivement cette détermination, il suffit [2] de posséder *une intégrale complète* de l'équation des caractéristiques, c'est-à-dire (à une restriction près, sur laquelle nous n'avons pas à insister ici [3]), une intégrale dépendant de trois constantes arbitraires (dans le cas qui nous intéresse, celui où le nombre des variables indépendantes est de quatre).

Nous partirons d'une multiplicité caractéristique qui, non seulement peut jouer le rôle d'intégrale complète, mais est même un peu plus générale, puisqu'elle contient *quatre* constantes, à savoir les coordonnées d'un point quelconque (a_0, b_0, c_0, t_0) de l'espace E_4. Soit

$$H(x_1, x_2 \dots x_n, P_1, P_2, \dots P_{n-1}) = 0 \tag{40}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre quelconque définissant x_n comme fonction de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ et où $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ désignent les dérivées premières de x_n. Pour chaque système de valeurs $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ de $x_1, x_2, \dots, x_n$, cette équation donne une relation entre

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n° **75**, p. 189-191.

(2) GOURSAT, *loc. cit.*

(3) GOURSAT, *Ibid.*, n° **48**, p. 96.

$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. Pour $n = 3$, ces variables x_1, x_2, x_3 peuvent être regardées comme des coordonnées cartésiennes et la relation obtenue entre P_1 et P_2 représente un cône auquel doit être tangente la surface cherchée. Nous pourrons, en nous servant de la géométrie à n dimensions, conserver la même interprétation géométrique, quel que soit n, et parler du cône Γ représenté par l'équation (**40**) au point O qui a pour coordonnées $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

A chaque direction (de multiplicités M_{n-1}) tangente à ce cône, suivant une certaine génératrice γ, — c'est-à-dire, à chaque système de valeurs de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ satisfaisant à l'équation pour les valeurs données des x —, la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre apprend à faire correspondre une caractéristique c de l'équation (**40**), ayant pour tangente au point donné la génératrice γ. Toute intégrale passant en O et pour laquelle $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ ont, en ce point, les valeurs considérées, contient nécessairement toute la caractéristique c.

L'intégrale que nous considérerons avec M. Darboux [1], et qui a été nommée par lui *intégrale à point singulier*, n'est autre que le lieu C des différentes caractéristiques c issues du point O et correspondant aux diverses directions possibles de γ. Elle admet évidemment O comme point conique, le cône tangent étant Γ. Elle est inscrite, le long d'une caractéristique c, à chaque intégrale passant par O.

Dans le cas où l'équation (**40**) sera celle qui définit les caractéristiques d'une équation ou d'un système tels que ceux que nous avons étudiés dans ce qui précède, nous donnerons à cette hypersurface C ayant O pour point conique, le nom de *conoïde caractéristique* de sommet O, le cône Γ étant dit le *cône caractéristique* de même sommet.

304. — Si maintenant, à son tour, le système en question est celui qui régit un mouvement, de sorte que les variables indépendantes soient a, b, c, t, et qu'on donne la position S_0 d'une onde à l'instant t_0, il suffira, pour obtenir la multiplicité caractéristique $\mathfrak{S}_0$ (*fig.* 19), qui coupe $t = t_0$ suivant la surface S_0, — c'est-à-dire la multiplicité qui figure la marche de cette onde, — de prendre l'enveloppe des conoïdes caractéristiques ayant pour sommets les différents points (a_0, b_0, c_0, t_0) qui constituent la surface S_0 considérée à l'instant t_0. Cette enveloppe aura, en général, plusieurs nappes :

---

(1) *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n° 2, p. 2[illegible] (*Mém. des savants étrangers*, t. XXVII, 1880).

mais, comme au n° **243**, s'il y a compatibilité, la propagation se fera suivant une seule, parfaitement déterminée, d'entre elles.

Soit Σ la surface (représentée sur la *fig.* 19 par une courbe), suivant laquelle la multiplicité $t = t'$ (représentée sur la *fig.* 19 par un plan parallèle à $t = t_0$) est coupée par le conoïde caractéristique de sommet (a_0, b_0, c_0, t_0). La construction que nous venons d'indiquer pour $\mathfrak{S}_0$ se traduira, dans le langage de la géométrie ordinaire, de la manière suivante : *Étant donnée la position* S_0 *d'une onde à l'instant* t_0, *pour obtenir la position* S'_0 *de cette onde à un instant ultérieur quelconque* t', *il suffira de prendre l'enveloppe des surfaces* Σ *correspondant aux différents points de* S_0.

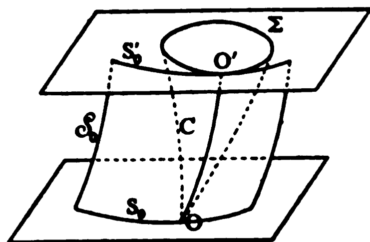


Fig. 19

Lorsque la surface S_0 est infiniment petite et se réduit au point unique (a_0, b_0, c_0), la multiplicité $\mathfrak{S}_0$ n'est autre que le conoïde caractéristique lui-même. La surface Σ est donc celle sur laquelle serait distribuée, à l'instant t', une discontinuité concentrée, pour $t = t_0$, aux environs du point (a_0, b_0, c_0).

305. — Les ondes rencontrées dans les chapitres V et VI avaient (n°s **239**, **271**) leurs vitesses de propagation toujours réelles et nous avons même été conduits à admettre (n° **271**) que ces vitesses étaient toujours finies.

Comme on le voit immédiatement en se reportant d'abord au cas du mouvement à deux dimensions, la condition que les vitesses soient réelles quelle que soit la direction de l'onde, revient à celle-ci, que la multiplicité $t = t_0$ n'est pas sécante au cône caractéristique du sommet O, et la condition que ces vitesses soient toujours finies exprime qu'elle ne lui est pas non plus tangente : qu'elle lui est, par conséquent, entièrement extérieure.

Si cette condition est remplie, il est clair que la surface Σ ne s'éloigne indéfiniment dans aucun sens. En particulier, la surface Σ correspondant au cas où S_0 se réduit au point O est toujours fermée.

306. — Inversement, soit donnée au temps $t' > t_0$, une surface S', Supposons d'abord cette surface réduite à un point O (*fig.* **20**) et soit Σ_0 la surface de section du cône caractéristique C de sommet O par la multipli-

cité $t' = t_0$. Si la surface Σ_0 est fermée comme nous l'admettons (1), il suffira, pour déterminer le mouvement en O à l'instant t', de connaître, à l'instant t_0, le mouvement, non de tous les points de l'espace, mais seulement *de ceux qui sont à l'intérieur de* Σ_0 : nous savons, en effet, que si, pour $t = t_0$, deux mouvements coïncident à l'intérieur de Σ_0 (tout en pouvant être distincts en dehors de cette surface), ils coïncideront ensuite dans toute la région intérieure à la multiplicité caractéristique menée par Σ_0, multiplicité qui n'est autre que C.

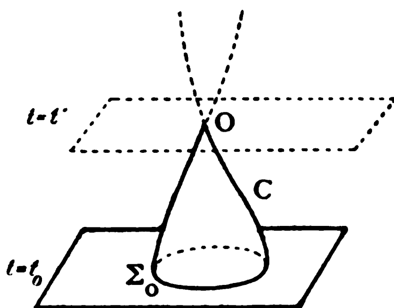


Fig. 20

Si maintenant S'_0 est une surface fermée quelconque et non plus un point, ce que nous venons de dire s'applique évidemment en remplaçant l'intérieur de Σ_0 par le domaine que remplissent les diverses surfaces Σ_0 correspondant aux différents points situés sur S'_0 ou intérieurs à S'_0.

307. — Lorsque les coefficients a_{11}, a_{12}, ... (n° **278**) des dérivées de l'ordre le plus élevé sont des constantes, de sorte que l'équation des caractéristiques ne contient pas explicitement les variables elles-mêmes, les cônes caractéristiques correspondant aux différents points de l'espace, sont égaux entre eux.

De plus, le conoïde caractéristique se réduit au cône caractéristique. L'équation des caractéristiques est, en effet, vérifiée lorsqu'on donne aux quantités que nous avons désignées par les lettres P_i et qui sont ici $\frac{dt}{da}$, $\frac{dt}{db}$, $\frac{dt}{dc}$, des valeurs constantes, ce qui donne pour t une fonction linéaire de a, b, c. Les bicaractéristiques correspondantes sont évidemment des droites (2), qui ne sont autres que les génératrices du cône Γ.

(1) Si le conoïde caractéristique se compose de plusieurs nappes, de sorte que Σ_0 se compose de plusieurs nappes fermées, il faut, ici, considérer la plus extérieure de ces nappes, de sorte que C soit *la nappe inclinée vers l'intérieur* de la caractéristique passant par Σ_0.

(2) Il est à peine nécessaire de rappeler qu'en géométrie à n dimensions, on appelle *droite*, une multiplicité à une dimension le long de laquelle les n coordonnées sont des fonctions linéaires les unes des autres.

Quant aux multiplicités caractéristiques sur lesquelles $\frac{dt}{da}, \frac{dt}{db}, \frac{dt}{dc}$ se réduisent aussi à des constantes, elles donnent évidemment les *ondes planes*, correspondant au cas où la surface S_0 se réduit à un plan et où, par conséquent, il en est de même des surfaces S'_0 correspondant à tout instant ultérieur, moyennant l'hypothèse, adoptée en ce moment, de la constance des coefficients a_{11}.....

308. — Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on donne le nom de *surface des ondes* à la surface Σ qui correspond à $t' - t_0 = 1$. Comme le conoïde caractéristique est ici l'enveloppe des ondes planes, la surface des ondes peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan S'_0 tel que sa distance au plan parallèle S_0 menée par O soit égale à la vitesse de propagation d'une discontinuité qui aurait lieu suivant S_0.

Lorsque, au contraire, les coefficients des dérivées de l'ordre le plus élevé ne sont plus constants, on définit la surface des ondes relative à un point déterminé quelconque O, en donnant partout à ces coefficients les valeurs qu'ils ont en O : ceci revient à substituer au conoïde caractéristique le cône Γ qui lui est tangent. La construction que nous venons d'indiquer en dernier lieu reste d'ailleurs valable.

L'équation de la surface ainsi engendrée est formée dans tous les traités de physique pour le cas des milieux gazeux, celui des milieux élastiques isotropes et celui des vibrations lumineuses en milieu cristallisé. Dans les deux premiers cas, cette surface se réduit à une sphère ; dans le dernier (qui n'est autre que celui des milieux élastiques satisfaisant aux hypothèses particulières des nos **274-276**), elle est du quatrième degré (surface des ondes de Fresnel).

309. — La définition que nous venons de donner de la surface des ondes va nous permettre de constater que les bicaractéristiques, telles que nous les avons introduites dans ce qui précède, ne sont autre chose que les *rayons* tels qu'on les considère en physique.

La direction d'un rayon est en effet, définie comme étant celle de la droite qui joint le point O au point de contact de la surface des ondes relative à ce point avec l'onde considérée. Or, celle-ci est représentée dans notre espace à quatre dimensions, par la multiplicité S_0 (*fig.* 19), laquelle est tangente au conoïde caractéristique C suivant la bicaractéristique OO'.

Supposons, pour simplifier, les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé constants : alors la surface Σ (*fig.* 19) sera homothétique, par rap-

port au point O, à la surface des ondes et la bicaractéristique OO′, laquelle sera alors une ligne droite, aura bien la direction du rayon, telle que nous l'avons indiquée il y a un instant.

Ce que nous venons de dire subsiste d'ailleurs lorsque les coefficients ne sont plus constants ; il faut seulement prendre pour t' un instant infiniment voisin de t_0. L'identité des bicaractéristiques et des rayons est donc établie.

310. — Les considérations précédentes ne permettent pas, sous leur forme actuelle, de rendre compte de toutes les propriétés physiques des rayons (1). Elles montrent cependant, d'ores et déjà, ces lignes comme jouant un rôle essentiel dans la propagation du mouvement. C'est ce que met encore en évidence la proposition suivante.

Soient donnés un premier mouvement satisfaisant aux équations, et une onde $\mathcal{S}_0$ (*fig.* 19), se propageant dans ce mouvement : onde que nous considérerons encore comme déterminée par sa position S_0 à un certain instant t_0. Soit t' l'instant ultérieur où cette onde atteint un point déterminé O′. *Le nouveau mouvement en ce point dépendra exclusivement du nouveau mouvement qu'a pris, à l'instant t_0, le point* O (*fig.* 19) *situé sur la même bicaractéristique que* O′.

C'est ce qui résulte, en effet, des calculs faits aux nos **293** et suivants. Ces derniers montrent que, connaissant la multiplicité $\mathcal{S}_0$ et les éléments de la discontinuité au seul point O, ces mêmes éléments seront déterminés en tous les points de la bicaractéristique issue de O.

Si, en particulier, la discontinuité n'existe à l'instant t_0 que sur une petite portion de la surface d'onde, elle n'existera, à l'instant t', que sur une petite portion de la surface S'_0, à savoir, celle qui est délimitée par les mêmes bicaractéristiques que la première.

311. — Les résultats que nous venons d'annoncer subsistent dans l'un et l'autre des deux cas traités précédemment, savoir que le déterminant ait ou non un mineur différent de 0. Mais, il ne faut pas l'oublier, nous avons supposé, dans le second cas, que la caractéristique considérée partageait avec toutes les caractéristiques infiniment voisines, la propriété d'annuler tous les mineurs de H. Nos raisonnements seraient en défaut si les caractéristiques qui possèdent cette propriété étaient particulières, c'est-à-dire si,

(1) Voir, plus loin, nos **350-351**.

en un point quelconque, les génératrices du cône Γ correspondant à ces caractéristiques dépendaient de moins de paramètres que les autres. Dans ce cas, rien ne pemettrait plus d'affirmer l'existence des bicaractéristiques. De telles caractéristiques singulières mériteraient sans doute d'être étudiées au point de vue analytique ; elles sont bien connues en optique : c'est à elles que correspond le phénomène de la *réfraction conique*. Contrairement à ce qui a lieu, en général, pour les caractéristiques multiples [1], elles ne donnent pas lieu à des singularités des solutions (Voir plus loin, n° **327**).

312. — La construction indiquée au n° **304**, permet encore de déterminer l'onde dans des circonstances un peu plus compliquées que celles dans lesquelles nous nous étions placés en cet endroit.

Considérons, par exemple, la *rencontre* de deux ondes, c'est-à-dire le cas où deux surfaces de discontinuité S, S′ primitivement tout à fait séparées l'une de l'autre et se propageant dans un milieu gazeux que nous supposerons, pour simplifier, indéfini viennent à se couper. Cette intersection aura lieu suivant une courbe l évidemment variable avec t. En employant encore le langage de la géométrie à quatre dimensions et représentant les surfaces d'onde par leurs positions S_0, S'_0, sur l'état initial, on peut dire que les multiplicités $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}'_0$ engendrées par les surfaces S_0, S'_0 lorsque t varie, se coupent suivant une multiplicité deux fois étendue Λ, dont les sections par $t =$ const. sont les positions successives de la courbe l. Il est aisé de se représenter, comme nous l'avons fait précédemment, le phénomène analogue dans le cas où il n'y a que deux coordonnées x, y et où les multiplicités $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}'_0$ sont des surfaces tracées dans un espace à trois dimensions (*fig.* 21). Λ serait alors une courbe tracée dans cet espace.

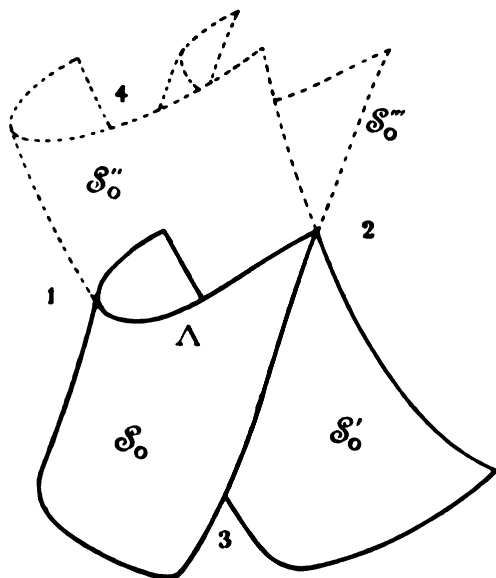


Fig. 21

[1] Voir, par exemple, la note de la page 306.

Pendant le temps où S_0, S'_0 seront sécantes et suivant les positions successives de la courbe l, naîtront évidemment deux nouvelles ondes, lesquelles ne seront en quelque sorte que la continuation des deux premières. Il est clair que les nouvelles multiplicités caractéristiques $\mathfrak{S}''_0$, $\mathfrak{S}'''_0$ (*fig.* 21) qui représenteront la marche de ces ondes seront déterminées par la condition de contenir la multiplicité Λ et qu'elles s'obtiendront, par conséquent, comme enveloppes des conoïdes caractéristiques ayant pour sommets les différents points de Λ, absolument comme nous l'avions expliqué lorsque Λ correspondait à $t = \text{const.}$ et se réduisait à une surface S_0.

Des considérations toutes semblables s'appliquent à la rencontre d'une onde avec une paroi fixe ou mobile. Cette dernière, par l'ensemble de ses positions pour les différentes valeurs de t, formera une hypersurface, laquelle coupera l'onde suivant une multiplicité Λ de même nature que celle que nous avons tout à l'heure désignée par cette notation. Il restera à faire passer par Λ une seconde caractéristique (onde réfléchie), ce qui se fera par la même construction que précédemment.

Dans ce cas comme dans le précédent, la multiplicité Λ est, par la manière même dont elle est obtenue, extérieure au cône caractéristique ayant pour sommet l'un quelconque de ses points, de sorte que (comparer n° **305**), les nouvelles ondes obtenues seront réelles.

313. — Le cas de la *réfraction* correspond, analytiquement parlant, à celui où l'espace E_4 serait divisé en deux régions où les équations du problème auraient des formes différentes. Une onde se propageant dans l'une de ces deux régions rencontrerait alors leur frontière commune suivant une multiplicité Λ, par laquelle il resterait à faire passer une caractéristique des équations relatives à la seconde région. Ici, toutefois, cette nouvelle caractéristique (onde réfractée) peut être imaginaire même lorsque la première est réelle.

Il est clair que la construction d'Huyghens n'est qu'une application de cette manière d'opérer.

314. — Enfin, il arrive souvent qu'une onde se rencontre elle-même : autrement dit, qu'une surface d'onde primitivement dépourvue de singularités acquière, au cours de sa propagation, des lignes doubles [1]. Cette

---

[1] C'est ainsi que les courbes parallèles à une courbe C, ont, en général, des points doubles (même si C en est dépourvue), lorsque la distance devient suffisamment grande et est reportée vers la concavité de C.

circonstance ne doit pas, bien entendu, être confondue avec le phénomène de Riemann et Hugoniot, étudié au chapitre IV : elle ne trouble pas, en général, la régularité du mouvement.

§ 2. — THÉORÈMES D'EXISTENCE

315. — Nous avons, dans ce qui précède, constaté que, sur une caractéristique, le calcul des dérivées de chaque ordre conduit à une indétermination. Il ne résulte pas de là, qu'il existe une infinité d'intégrales résolvant le problème de Cauchy donné, ni même qu'il en existe une seule.

Pour le cas d'une équation du second ordre analytique à deux variables indépendantes, ce fait a été établi par M. Goursat (1), comme conséquence du théorème suivant :

Etant données une équation aux dérivées partielles analytique à deux variables indépendantes, et, d'autre part, deux lignes concourantes analytiques dont chacune soit tangente à l'une des caractéristiques issues de leur point de concours, l'équation admet une intégrale analytique (et une seule) prenant respectivement sur les deux courbes données des valeurs analytiques données.

De ce théorème résulte aisément l'existence d'une infinité d'intégrales analytiques résolvant le problème de Cauchy pour une caractéristique.

316. — Le théorème de M. Goursat a été généralisé par Beudon, *loc. cit.*, à l'équation à un nombre quelconque de variables traitée aux nos **278** et suiv.

Nous allons démontrer le résultat de Beudon en adoptant des hypothèses un peu plus générales. Déjà, en effet, dans le cas de deux variables, il n'est pas nécessaire que les *deux* lignes le long desquelles z est donné soient des caractéristiques. Il suffit, comme l'ont montré M. Picard (2) pour les équations linéaires analytiques ou non, puis M. Goursat (3) en supposant les équations analytiques, mais non nécessairement linéaires, que cette propriété appartienne à une seule des lignes en question. C'est un

(1) *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome I p. 184-193.

(2) in Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, tome IV, note 1.

(3) *Equations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, pages 303-308.

problème de cette espèce qui s'est présenté au n° **180** dans l'étude du mouvement rectiligne d'un gaz.

Nous étendrons d'une manière analogue le théorème de Beudon, en considérant deux multiplicités à $n-1$ dimensions non tangentes entre elles et dont la première sera, en un point que nous prendrons pour origine des coordonnées, tangente à une caractéristique. Cette propriété subsistera d'ailleurs (comparer n° **162**), après un changement de variables indépendantes, moyennant lequel nous pourrons supposer que nos deux hypersurfaces aient pour équations $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$.

Sur chacune d'elles, nous supposerons donnée la série des valeurs de z, soit

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \text{pour } x_n = 0 \\ z = \chi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n) & \text{pour } x_{n-1} = 0. \end{array} \right.$$

Bien entendu, ces valeurs devront coïncider sur la multiplicité (à $n-2$ dimensions) commune aux deux premières : nous pourrons écrire

$$(42) \qquad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0) = \chi(x_1, x_2, \ldots x_{n-2}, 0) = \varpi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}).$$

L'équation aux dérivées partielles étant

$$\mathcal{F} = 0,$$

la condition que $x_n = 0$ soit tangent à une caractéristique s'exprimera (n° **288**), par la condition

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{nn}} = 0.$$

Par contre, nous supposerons l'équation résoluble par rapport à p_{nn-1}. La condition $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{nn-1}} = 0$, revient à admettre que la multiplicité M_{n-2} définie par les équations $x_n = x_{n-1} = 0$, n'est pas tangente à une bicaractéristique. Si le cas contraire se produisait, les valeurs données ψ, χ devraient vérifier une nouvelle condition de possibilité. Nous avons vu, en effet, que la dérivée de p_n suivant une bicaractéristique peut se calculer en fonction des z, x_i, p_i : il faudrait que la valeur ainsi obtenue à l'origine fût égale à celle que l'on connaît directement puisque p_n est donné (à savoir, égal à $\frac{\partial \chi}{\partial x_n}$) sur la multiplicité M_{n-2}. On aurait de même une autre condition de possibilité en considérant la dérivée de p_{nn}, et ainsi de suite pour chaque ordre de dérivation.

317. — Soit donc l'équation du second ordre, résolue par rapport à $p_{n\,n-1}$:

$$(43) \qquad p_{n\,n-1} = F(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1 \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn})$$

et supposons que la fonction F soit analytique et holomorphe par rapport aux variables dont elle dépend [1], dans un domaine comprenant les valeurs que ces variables prennent à l'origine, la quantité $\frac{\partial F}{\partial p_{nn}}$ étant nulle en ce dernier point.

Nous allons démontrer que *si les fonctions ψ et χ sont également analytiques et holomorphes autour de l'origine, le problème posé admettra une solution holomorphe, et une seule.*

Nous pourrons, quand nous le voudrons, simplifier la question en ramenant ψ et χ à être nuls. Il suffira, à cet effet, d'introduire, au lieu de z, la nouvelle inconnue

$$z' = z - \psi - \chi + \varpi$$

($\varpi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ étant définie par l'équation (42)). Nous pourrons également, en retranchant de z le terme $ax_n\, x_{n-1}$, où a est une constante convenable (ce qui diminue $p_{n\,n-1}$ de cette constante) nous arranger pour que F soit nul à l'origine. Dans ces conditions, la fonction F sera représentée par un développement convergent ordonné suivant les puissances de z, des x_i, des p_i et des p_{ik} à l'exception de $p_{n\,n-1}$, développement qui manquera de terme constant et de terme en p_{nn} seul.

318. — Que cette transformation ait été effectuée ou non, les données du problème font connaître les valeurs à l'origine de toutes les dérivées de z.

Tout d'abord, lorsqu'il n'y a pas, à la fois au moins une différenciation par rapport à x_n, et au moins une différenciation par rapport à x_{n-1}, ces valeurs résultent de la différenciation des équations de condition (41) ; elles sont nulles si l'on prend $\psi = \chi = 0$.

[1] Le théorème que nous avons en vue a été, comme nous l'avons dit, établi par M. Picard, indépendamment de l'hypothèse d'analyticité, pour le cas de deux variables. Dans le cas où n est plus grand que 2, l'extension aux données non analytiques — ou plutôt, la question de savoir comment cette extension est possible — présente des difficultés nouvelles, qui n'ont pas été surmontées jusqu'à présent.

Convenons d'autre part, de dire qu'une dérivée partielle de z est *antérieure* à une autre :

1° Si elle est d'un ordre total moindre ;

2° Si, étant du même ordre, elle comprend moins de dérivations par rapport à x_n ;

3° Si, étant du même ordre et comprenant autant de dérivations par rapport à x_n, elle comprend moins de dérivations par rapport à x_{n-1}.

Soit maintenant $p_{nn-1ijk....}$ (où les indices i, j, k... ont des valeurs tout à fait quelconques entre 1 et n) une dérivée dans laquelle on a différencié à la fois par rapport à x_n et à x_{n-1}. Nous calculerons la valeur de cette quantité en appliquant l'opération $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}.....$ aux deux membres de l'équation (43). Toutes les dérivées qui figureront au second membre seront évidemment antérieures à celle que nous cherchons, à la seule exception de p_{nnijk} ...... Mais cette dernière s'éliminera à l'origine : car elle a pour coefficient $\frac{\partial F}{\partial p_{nn}}$, quantité dont la valeur initiale est nulle.

Le second membre de l'équation obtenue ne comprendra dès lors que des quantités déjà connues si nous avons pris soin, ce qui est évidemment possible, de ne jamais passer au calcul d'une dérivée sans avoir effectué celui des dérivées antérieures.

Cette première conclusion est donc démontrée. Il suit de là que si le problème admet une solution holomorphe, cette solution est unique.

De plus, nous remarquerons :

1° Que toutes les équations résultant de la différenciation de (43) sont ainsi utilisées, de sorte que toutes ces équations sont vérifiées à l'origine par le système des valeurs des p_{ik}... ainsi calculé ;

2° Que ce calcul ne comporte que des additions et des multiplications.

En vertu de cette dernière remarque, nous pourrons appliquer la méthode des fonctions majorantes. Nous remplacerons les développements donnés de F, ψ, χ par d'autres respectivement majorants des premiers ; et, si le problème ainsi modifié a une solution holomorphe, nous pourrons en conclure que les valeurs des p_{ijk}..... correspondant au problème donné fournissent, elles aussi, un développement de Taylor convergent (lequel satisfera nécessairement à l'équation proposée, d'après la première des deux remarques qui viennent d'être faites).

En ce qui concerne les fonctions ψ et χ données, nous pouvons les supposer nulles, comme il a été expliqué tout à l'heure. Dans ces conditions,

chacune d'elles admettra pour majorante toute fonction représentée par un développement à coefficients tous positifs.

Quant à la fonction F, puisqu'elle manque de terme constant et de terme en p_{nn}, elle admettra, d'après une remarque bien connue, une majorante de la forme

$$\frac{M}{\left\{1 - \frac{x_1 + x_2, \ldots + x_n + z + \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum' p_{ik}}{R}\right\}} - M\left(1 + \frac{p_{nn}}{R}\right).$$

la somme Σ' se rapportant à toutes les dérivées secondes à l'exception de $p_{n\,n-1}$.

Beudon, admettant que $x_{n-1} = 0$ était une caractéristique, supprimait encore, dans cette expression le terme en $p_{n-1\,n-1}$ seul. En raison de la présence de ce terme, nous devrons, ici, employer l'artifice indiqué par M. Goursat, et qui consiste à remarquer que la fonction F est *a fortiori* majorée si nous remplaçons, au dénominateur, x_n par $\frac{x_n}{\lambda}$, où λ désigne un nombre positif quelconque plus petit que 1. Nous sommes ainsi conduits à l'équation

$$(44)\quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n\,n-1} = \dfrac{M}{\left\{1 - \dfrac{x_1 + \ldots x_{n-1} + \frac{x_n}{\lambda} + z + \sum p_i + \sum' p_{ik}}{R}\right\}} \\ \qquad - M\left(1 + \dfrac{p_{nn}}{R}\right) \end{array} \right.$$

et le théorème sera démontré si nous obtenons, pour cette équation, une solution nulle à l'origine ainsi que ses dérivées premières et secondes, et se réduisant, tant pour $x_n = 0$ que pour $x_{n-1} = 0$, à des fonctions dont les développements soient à coefficients tous positifs

Nous chercherons une telle solution en prenant z fonction des deux variables

$$(45)\qquad X = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2}, \quad Y = \lambda x_{n-1} + x_n :$$

l'équation (**44**) deviendra

$$\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = -M\left(1 + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right)$$
$$+ \frac{M}{\left\{1 - \frac{1}{R}\left[X + \frac{Y}{\lambda} + z + (n-2)\frac{\partial z}{\partial X} + (1+\lambda)\frac{\partial z}{\partial Y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + (1+\lambda)(n-2)\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + (1+\lambda^2)\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right]\right\}}$$

où C est le coefficient numérique $C = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Le second membre comprend un terme en $\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$, le terme $\frac{M}{R}\lambda^2\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$. Nous déterminerons λ de manière que ce terme ait un coefficient plus petit que celui du premier membre, soit

(**46**) $$\lambda < \frac{R}{M}.$$

Nous pourrons alors faire passer le terme en $\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$ du second membre dans le premier et l'équation obtenue sera de la forme

(**47**) $$\lambda\left(1 - \frac{M\lambda}{R}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = F_1\left(X, Y, z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y}, \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right)$$

où F_1 est holomorphe par rapport aux variables dont il dépend autour des valeurs nulles de ces variables, son développement étant à coefficients tous positifs et manquant de terme en $\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$ seul.

Le théorème de Cauchy-Kowalewsky nous apprend que cette équation admet une intégrale holomorphe nulle, ainsi que sa dérivée par rapport à Y, pour Y = 0. Si l'on substitue pour X et Y leurs valeurs (**45**), on aura une solution holomorphe de l'équation (**44**). Cette solution et, par conséquent, les fonctions auxquelles elle se réduit pour $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$ ont d'ailleurs comme le montre le calcul même qui les donne à l'aide de l'équation (**47**) [1],

---

[1] Pour effectuer ce calcul, il est inutile de résoudre l'équation (**47**) par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$, grâce à cette circonstance que, au second membre, le coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$ est nul à l'origine.

des développements à coefficients tous positifs, leurs valeurs initiales ainsi que celles de leurs dérivées premières et secondes étant nulles.

Donc, le théorème est démontré.

319. — De la proposition précédente, on déduit aisément celle que nous avions en vue, à savoir l'existence d'une infinité de solutions holomorphes pour le problème de Cauchy dans le cas d'une caractéristique.

Supposons encore que la multiplicité caractéristique ait pour équation $x_n = 0$. Nous pourrons, en outre, supposer que les valeurs données de z sur cette multiplicité soient nulles, ainsi que celles de p_n et celles qu'on en déduit pour p_{nn}. Il est clair, en effet, qu'on ramènera le cas contraire à celui-là par un changement d'inconnue de la forme

$$(48) \qquad z = z' + A + Bx_n + Cx_n^2,$$

(A, B, C étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Dans ces conditions, l'équation (43) devra être vérifiée, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour x_n et z nuls avec les p_i et les p_{ik}.

Mais, de plus, la multiplicité donnée doit être une caractéristique, et non plus seulement tangente à une caractéristique à l'origine, c'est-à-dire qu'on doit avoir, dans les mêmes conditions, d'une part $\frac{\partial F}{\partial p_{nn}} = 0$, d'autre part l'équation (16bis) (n° **288**), laquelle se réduit ici à $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$.

Ceci revient à dire que tout terme du développement de F renferme en facteur l'une au moins des quantités

$$\begin{gathered} z,\ p_i\ (i = 1, 2, \ldots, n) \\ p_{ik}\ (i, k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ p_{nk'}\ (k' = 1, 2, \ldots, n-2) \\ x_n^2,\ x_n p_{nn},\ p_{nn}^2. \end{gathered}$$

Donnons-nous alors arbitrairement les fonctions holomorphes $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$ de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ et considérons la solution holomorphe de l'équation (43) qui, pour $x_n = 0$ se réduit à 0 et, pour $x_{n-1} = 0$, à

$$(49) \qquad \varphi_3 x_n^3 + \varphi_4 x_n^4 + \ldots$$

solution dont l'existence vient d'être établie. Il est aisé de constater que quelles que soient les fonctions $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$, cette solution répond à notre problème de Cauchy, c'est-à-dire que, outre ses valeurs, celles de sa dérivée p_n et de sa dérivée p_{nn} sont nulles avec x_n. Il suffit à cet effet puis

qu'il s'agit de fonctions holomorphes) de s'assurer que, pour cette intégrale z, toutes les dérivées contenant une ou deux dérivations par rapport à x_n sont nulles à l'origine. Or c'est ce que l'on vérifie sans difficulté en reprenant, dans les hypothèses actuelles, les calculs du n° précédent par lesquels on obtient ces dérivées.

Le théorème est donc démontré.

319bis. — L'expression (**49**) représente la valeur la plus générale que puisse prendre, sur la multiplicité $x_{n-1} = 0$, une fonction holomorphe z qui soit nulle, ainsi que ses deux premières dérivées par rapport à x_n, pour $x_n = 0$.

Repassons maintenant des calculs tels que nous venons de les faire à ceux qui leur correspondent lorsqu'on n'effectue pas la transformation (**48**). Alors les valeurs, pour $x_n = 0$, de z et de ses dérivées des deux premiers ordres ne sont plus nulles, mais elles devront encore vérifier : 1° l'équation (**43**) ; 2° la condition $\frac{\partial F}{\partial p_{nn}}$ qui exprime que $x_n = 0$ est une caractéristique ; 3° la condition (**16**^bis^), nécessaire pour l'existence des dérivées troisièmes. Et inversement, ces conditions sont les seules que nous ayons postulées dans le raisonnement du n° précédent.

Celui-ci montre, par conséquent, qu'*une distribution (sur la multiplicité $x_n = 0$) des valeurs de p_n, p_{nn} satisfaisant aux trois conditions en question (où l'on donne à z les valeurs $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$), sera celle même qui correspond à la solution du problème traité aux n^os^* **316-318**, *si elle coïncide, en tout point de l'intersection des deux multiplicités $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$, avec celle qu'on déduit de la deuxième condition* (**41**).

Lorsque l'équation est linéaire par rapport aux p_{ik}, *on peut énoncer la même propriété pour une distribution de valeurs de p_n qui satisfait au même système de conditions à l'exception de* (**16**^bis^), *celle-ci étant remplacée par l'équation* (**13**) (n° **282**). Car, en déterminant p_{nn} par l'équation (**16**) jointe à la condition de coïncider, sur l'intersection des deux multiplicités, avec les valeurs correspondantes de $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}$, on est ramené à l'énoncé précédent.

320. — La proposition établie au n° **318** n'est pas seulement utile à la démonstration du théorème du n° **319**. Elle est, en elle-même, susceptible d'applications dynamiques. Le problème qu'elle résout est, en parti-

culier, celui auquel on est conduit en étudiant, comme au n° **312**, le phénomène de la rencontre des ondes.

Avant cette rencontre, le fluide est divisé en trois régions animées de mouvements distincts : nous désignerons par l'indice 1 celui que propage l'onde S_0, par l'indice 2 celui que propage l'onde S'_0, par l'indice 3 le mouvement intermédiaire.

Supposons :

1° que ces mouvements soient tous trois dépourvus de rotation ;

2° qu'ils soient analytiques ainsi que les multiplicités S_0, S'_0. Il en sera alors de même pour la multiplicité A et aussi pour les ondes S_0', S_0'' qui prennent naissance, ainsi que nous l'avons vu, à la rencontre des premières et se propagent respectivement, à partir de A, dans les mouvements 1 et 2.

Cela posé, nous allons montrer l'existence d'un quatrième mouvement analytique, satisfaisant aux équations de l'hydrodynamique et se raccordant avec 1 et 2 suivant les caractéristiques S_0', S_0''. C'est précisément par ces conditions qu'est déterminé le nouveau mouvement intermédiaire qui prend naissance entre les deux ondes correspondantes.

Il suffira de calculer le potentiel des vitesses Φ du mouvement cherché : Φ devra d'abord vérifier l'équation (**23'**).

D'autre part, toutes ses dérivées premières devront être, sur S_0' et S_0'' les mêmes que celles qui correspondent aux mouvements 1 et 2 respectivement, puisque (les discontinuités étant supposées du second ordre au moins) vitesses et pressions restent continues.

Or nous savons qu'il existe une fonction holomorphe Φ qui vérifie l'équation (**23'**) et prend, sur S_0' les mêmes valeurs que le potentiel des vitesses du mouvement 1 ; sur S_0'' les mêmes valeurs que le potentiel des vitesses du mouvement 2.

Le potentiel des vitesses du nouveau mouvement intermédiaire étant ainsi choisi, il y aura continuité (au passage de S_0' et de S_0''), non seulement des valeurs de ce potentiel, mais aussi de celles de ses dérivées, comme les conditions de notre problème l'exigent.

En effet, les dérivées en question, déduites du mouvement 1, forment sur la multiplicité S_0' une distribution caractéristique. Comme, d'autre part, l'équation (**23**) est linéaire par rapport aux dérivées secondes, la continuité annoncée aura lieu dans toute l'étendue de S_0' en vertu du n° **319**bis) si elle existe en tous les points de A.

Or, en ces points, elle résulte de ce que les dérivées de Φ peuvent se calculer à l'aide des valeurs de cette fonction sur S_0 pour le mouvement 1, et sur S_0 pour le mouvement cherché, valeurs que l'on peut considérer

commes données par les mouvements 3 et 2 respectivement ; et que d'autre part, il y a, nous le supposons, continuité des dérivées premières entre les trois mouvements primitifs. (Comparer la note de la page 174).

Le mouvement déduit du potentiel des vitesses calculé comme nous venons de le dire satisfera donc bien à toutes les conditions du problème.

321. — Nous nous proposerons, maintenant, de généraliser la proposition des nos **316-318** aux systèmes à plusieurs inconnues. Soit donc un tel système aux inconnues ξ, η, ζ. Considérons encore deux multiplicités sécantes dont nous pourrons toujours prendre les équations sous la forme $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$, la première étant tangente à une caractéristique, qui ne soit pas multiple (n° **284**) la seconde quelconque sous la seule condition que leur intersection ne soit pas tangente à une bicaractéristique.

Nous supposons que le système donné est analytique et régulier et reste tel après le changement de variables que nous avons opéré pour donner aux équations de nos deux multiplicités la forme précédente. Dans ces conditions, si nous cherchons des valeurs de ξ, η, ζ qui s'annulent à l'origine ainsi que leurs dérivées premières et secondes, nous devrons admettre que les premiers membres des équations sont développables suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi, \eta, \zeta, p_i, q_i, r_i, p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}$. De plus, si les termes en p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} de ces développements sont

$$(50) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A p_{nn} + B q_{nn} + C r_{nn}, \\ A' p_{nn} + B' q_{nn} + C' r_{nn}, \\ A'' p_{nn} + B'' q_{nn} + C'' r_{nn}, \end{array} \right.$$

et si l'on tient compte de ce qui a été dit au n° **301**, les coefficients A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' ne seront autres que les valeurs initiales des quantités que nous avons désignées sous ce nom au n° **291**. Le déterminant H, égal, à l'origine, à

$$\left| \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{array} \right|$$

devra être nul, puisque $x_n = 0$ est tangente à une caractéristique. Autrement dit, nous pourrons former une combinaison linéaire de nos trois équations telle que les termes de la forme (50) y disparaissent entièrement : combinaison qui pourra remplacer l'une des équations données, la troisième par exemple.

Admettons donc que l'on a $A' = B' = C' = 0$. Les dérivées $\frac{\partial H}{\partial P_i}$ se réduisent à

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} \tag{51}$$

en désignant par a_i, b_i, c_i, les coefficients de p_{in}, q_{in}, r_{in} dans la troisième équation. Il résulte de là :

1° Que les déterminants (51) ne sont pas tous nuls, puisque notre caractéristique est simple (¹) ;

2° Qu'en particulier, celui qui correspond à $i = n - 1$ est différent de zéro, puisque l'intersection de nos deux multiplicités n'est pas tangente à une bicaractéristique.

322. — Nous pourrons, dans ces conditions, opérer un changement d'inconnues tel que deux d'entre elles soient remplacées par les quantités

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= A\xi + B\eta + C\zeta \\ \eta_1 &= A'\xi + B'\eta + C'\zeta \end{aligned} \right. \tag{52}$$

ou, plus généralement, par les quantités

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta, \\ &\mathcal{A}'\xi + \mathcal{B}'\eta + \mathcal{C}'\zeta, \end{aligned} \right. \tag{53}$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ sont des fonctions holomorphes quelconques se réduisant, à l'origine, à A, B, C, A', B', C'.

Quant à la troisième inconnue, ce sera une fonction quelconque

$$\zeta_1 = \psi(\xi, \eta, \zeta, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(¹) S'il n'en était pas ainsi, les résultats auxquels on arriverait seraient de nature fort différente, comme le montre immédiatement l'exemple du système

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_n^2} &= \frac{\partial}{\partial x_n} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi, \eta, \zeta, p_n, q_n, r_n) + M, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_n \partial x_{n-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi, \eta, \zeta, p_n, q_n, r_n) + N, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_n^2} &= \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi, \eta, \zeta, p_n, q_n, r_n, p_{nn}, q_{nn}, r_{nn}) \end{aligned} \right.$$

(où M et N sont des fonctions données des x) : système qui est impossible si l'on a pas $\frac{\partial M}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial N}{\partial x_n}$.

telle que l'on ait à l'origine,

$$\text{(54)} \qquad \frac{D(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} & \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Comme on a

$$\text{(55)} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_n^2} = Ap_{nn} + Bq_{nn} + Cr_{nn}, \quad \frac{\partial^2\eta_1}{\partial x_n^2} = A'p_{nn} + B'q_{nn} + C'r_{nn}, \\ \frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x_n^2} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} p_{nn} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} q_{nn} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} r_{nn} + \dots \end{cases}$$

l'égalité (**54**) exprime que la troisième des dérivées (**55**) ne s'exprime pas à l'aide des deux premières et, par conséquent, que les équations données n'en fournissent pas l'expression à l'aide de dérivées contenant moins de deux différentiations par rapport à x_n.

323. — Supposons ce changement d'inconnues déjà effectué. Alors les coefficients A, B', seront égaux à un, pendant que B, A', C, C' seront nuls : par conséquent, le déterminant fonctionnel des premiers membres de nos équations par rapport à p_{nn}, q_{nn}, r_{nn-1} sera initialement égal à $\frac{\partial H}{\partial P_{n-1}}$, c'est-à-dire différent de zéro. On pourra donc résoudre ces équations par rapport à p_{nn}, q_{nn}, r_{nn-1} et les écrire sous la forme

$$\text{(56)} \quad \begin{cases} p_{nn} = F(x_i, \xi, \eta, \zeta, p_i, q_i, r_i, p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}) \\ q_{nn} = \Phi(x_i, \xi, \eta, \zeta, p_i, q_i, r_i, p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}) \\ r_{nn-1} = \Psi(x_i, \xi, \eta, \zeta, p_i, q_i, r_i, p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}) \end{cases}$$

où les seconds membres ne contiennent pas p_{nn}, q_{nn}, r_{nn-1}, et où l'on a, à l'origine,

$$\text{(57)} \qquad \frac{\partial F}{\partial r_{nn}} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_{nn}} = \frac{\partial \Psi}{\partial r_{nn}} = 0.$$

Nous allons montrer que, pour déterminer une solution d'un tel sytème, on peut se donner :

1° Pour les inconnues ξ et η, les conditions de Cauchy, à savoir, les valeurs de ces quantités et de leurs dérivées premières pour $x_n = 0$;

2° Pour l'inconnue ζ, au contraire, les conditions analogues à celles du n° **316**, à savoir, les valeurs de cette inconnue elle-même sur $x_n = 0$ et

sur $x_{n-1} = 0$ (valeurs qui devront concorder, bien entendu, lorsque x_n et x_{n-1} seront nuls à la fois).

Ces différentes données seront encore supposées analytiques.

Elles nous feront évidemment connaître à l'origine, parmi les dérivées de ζ, toutes celles où il n'y a pas différenciation à la fois par rapport à x_n et par rapport à x_{n-1} et, parmi les dérivées de ξ, η, toutes celles où il y aura, au plus, une différenciation par rapport à x_n.

Pour calculer les dérivées restantes, nous les classerons encore par ordre d'antériorité. La définition adoptée pour les dérivées antérieures les unes aux autres sera la même que précédemment (n° **318**) avec cette convention additionnelle que, de deux dérivées du même ordre comprenant le même nombre de différentiations par rapport à x_n et par rapport à x_{n-1}, une dérivée de ξ ou de η sera considérée comme antérieure à une dérivée de ζ.

Le calcul se fera alors sans difficulté par une méthode toute semblable à celle du n° **318**. Il utilisera toutes les relations qui résultent de la différentiation des équations données.

Pour démontrer la convergence des développements ainsi obtenus, on supposera encore que toutes les données initiales (valeurs de ξ, de η, de $\frac{\partial \xi}{\partial x_n}$ et de $\frac{\partial \eta}{\partial x_n}$ pour $x_n = 0$, valeurs de ζ pour $x_n = 0$ et pour $x_{n-1} = 0$) soient nulles : résultat qu'on peut toujours obtenir par un changement d'inconnues.

Comme, ici encore, les opérations qui ont servi à obtenir les dérivées successives à l'origine se composent exclusivement d'additions et de multiplications, nous pourrons remplacer les différentes données du problème par des majorantes. Aux données initiales nulles nous pourrons en substituer d'autres représentées par des développements à coefficients positifs choisis entièrement à notre volonté, ceux des termes constants ainsi que des termes du premier et du second ordre étant toutefois nuls.

Quant à F, Φ, Ψ, leurs majorantes seront de la forme

$$+\frac{M}{1-\frac{1}{R}\left[\sum x_i+\xi+\eta+\zeta+\sum(p_i+q_i+r_i)+\sum{}'(p_{ik}+q_{ik}+r_{ik})\right]}$$

$$-M\left(1+\frac{r_{nn}}{R}\right)$$

(la somme désignée par le signe Σ' se rapportant à toutes les dérivées

secondes à l'exception de p_{nn}, q_{nn}, r_{nn-1}) ou, en remplaçant encore x_n par $\frac{x_n}{\lambda}$,

$$+\frac{M}{1-\frac{1}{R}\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i+\frac{x_n}{\lambda}+\xi+\eta+\zeta+\sum(p_i+q_i+r_i)+\sum{}'(p_{ik}+q_{ik}+r_{ik})\right]}\cdots$$

$$-M\left(1+\frac{r_{nn}}{R}\right)$$

Si nous cherchons des solutions dépendant des deux quantités

$$X=x_1+x_2+\ldots+x_{n-2},\quad Y=\lambda x_{n-1}+x_n,$$

ces solutions seront déterminées par les équations

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial Y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial Y^2}=\lambda\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}$$

$$=\frac{M}{1-\frac{1}{R}\left(\begin{array}{l}X+\frac{Y}{\lambda}+\xi+\eta+\zeta+(n-2)\frac{\partial(\xi+\eta+\zeta)}{\partial X}\\ +(1+\lambda)\frac{\partial(\xi+\eta+\zeta)}{\partial Y}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{\partial^2(\xi+\eta+\zeta)}{\partial X^2}\\ +(n-2)(1+\lambda)\frac{\partial^2(\xi+\eta+\zeta)}{\partial X\partial Y}+(\lambda^2+\lambda)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial Y^2}\right)+(\lambda^2+1)\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}\end{array}\right)},$$

$$-M\left(1+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}\right)$$

lesquelles seront vérifiées (en posant encore $C=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$) par

$\xi=\eta=\lambda\zeta$,

$$\frac{\lambda\partial^2\zeta}{\partial Y^2}=-M\left(1+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}\right)$$

$$+\frac{M}{1-\frac{1}{R}\left(\begin{array}{l}\left[X+\frac{Y}{\lambda}+(2\lambda+1)\left[\zeta+(n-2)\frac{\partial\zeta}{\partial X}+(1+\lambda)\frac{\partial\zeta}{\partial Y}\right.\right.\\ \left.\left.+C\frac{\partial^2\zeta}{\partial X^2}+(n-2)(1+\lambda)\frac{\partial^2\zeta}{\partial X\partial Y}\right]+(\lambda^2(2\lambda+3)+1)\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}\right]\end{array}\right)}\cdots$$

Or, dans cette dernière équation, si λ satisfait à l'inégalité

$$\lambda(2\lambda+3)<\frac{R}{M},$$

le terme en $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial Y^2}$ aura un coefficient moindre dans le second membre que dans le premier, où nous pourrons le faire entièrement passer.

Dès lors, le raisonnement devient absolument identique à ce qu'il était dans le cas d'une seule équation et l'existence d'une solution holomorphe à coefficients positifs est établie.

324. — On déduira de là l'existence d'une infinité de solutions pour le problème de Cauchy, lorsque la multiplicité $x_n = 0$ est une caractéristique. Pour tenir compte de ce que cette circonstance a lieu en tous les points de la multiplicité en question et non plus à l'origine, il faudra exprimer qu'il existe en chacun d'eux une combinaison linéaire des trois équations données dans laquelle les dérivées par rapport à p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} s'éliminent. Si (les équations étant toujours à premiers membres holomorphes), nous supposons pour fixer les idées le mineur z' différent de 0, cette combinaison linéaire pourra être substituée à la troisième équation donnée.

Une transformation tout analogue sera alors faite sur les inconnues : dans les deux premières équations, les dérivées par rapport à p_{nn}, q_{nn}, r_{nn}, considérées en un point quelconque de notre multiplicité seront des fonctions holomorphes de x_1, x_2, x_{n-1}. En désignant par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ ces dérivées, nous pourrons prendre pour deux de nos nouvelles inconnues les combinaisons (**53**).

Nous aurons ainsi réduit nos équations à la forme (**56**), les conditions (**57**) étant vérifiées, cette fois, en tout point de la multiplicité $x_n = 0$. D'autre part, nous pouvons admettre, moyennant une triple transformation analogue à (**48**), que les données initiales ξ, η, ζ, p_n, q_n, r_n, sur cette multiplité soient nulles, ainsi que les valeurs qu'on en déduit pour p_{nn}, q_{nn}, r_{nn}. Ces valeurs nulles devront donc vérifier les conditions (**53**), (**57**) et aussi la condition (**32**'), soit ici $\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0$: autrement dit, chaque terme de F ou de Φ devra contenir en facteur une des quantités

$$(58) \quad \begin{cases} \xi, \eta, \zeta, \quad p_i, q_i, r_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ p_{ik}, q_{ik}, r_{ik} & \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix} \right\} (r_{n,n-1} \text{ excepté}) \Big) ; \end{cases}$$

$$(59) \quad \begin{cases} x_n, \\ r_{nn}^2 ; \end{cases}$$

chaque terme de Ψ, une des quantités (**58**) ou :

(**60**) $$x_{nn}^2,\ x_n r_{nn},\ r_{nn}^2.$$

Il résulte aisément de là que si l'on prend comme données initiales :

1° sur $x_n = 0$: ξ, η, ζ, p_n, q_n nuls ;

2° sur $x_{n-1} = 0$: ζ égal à l'expression (**49**) (n° **319**),

les quantités r_n, p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} seront identiquement nulles avec x_n, quels que soient φ_3, φ_4, ... On le prouvera, comme précédemment, en suivant l'ordre même du calcul par lequel nous avons obtenu les dérivées successives.

324bis. — Il est clair qu'on peut tirer de là des conséquences toutes semblables à celles qui ont fait l'objet du n° **319**bis. Si nous nous plaçons, pour simplifier, dans le cas où les équations sont linéaires par rapport aux dérivées secondes, nous pouvons dire que lorsqu'une distribution de valeurs de r_n sur la multiplicité $x_n = 0$ (*combinée avec une série donnée de valeurs de* ξ, η, ζ, p_n, q_n) *rend cette multiplité caractéristique, et satisfait à l'équation* (**30**) (*n°* **292**) (*condition d'existence des dérivées secondes*) *cette distribution sera précisément celle qu'on obtiendra en résolvant le problème du n°* **323**, *si la coïncidence a lieu sur l'intersection des deux multiplicités* $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$.

325. — Comme le théorème du n°s **316-318**, celui que nous venons de démontrer aux n°s **321-323** est susceptible d'une interprétation hydrodynamique simple.

Nous avons vu plus haut comment, étant donnés le mouvement initial d'un gaz et le mouvement de la paroi, on pouvait obtenir l'accélération initiale des points voisins de cette paroi. Le nouveau mouvement ainsi créé se propage, d'ailleurs, par une onde dont l'équation aux dérivées partielles (**23**) (ou, ce qui revient au même, l'équation (**4**) du n° **240**), permet de trouver la position à chaque instant, une fois supposé connu le mouvement du fluide au delà de cette onde (lequel fournit la valeur de φ).

Supposons ce dernier mouvement analytique ainsi que le mouvement donné de la paroi. Il en sera alors de même pour le mouvement de la surface d'onde S. Le mouvement qui prendra naissance entre cette surface et la paroi devra être tel :

1° qu'il y ait constamment contact entre le fluide et la paroi, c'est-à-dire

(équation de la surface dans l'état initial) on ait

$$\psi(x, y, z, t) = 0.$$

2° qu'il y ait raccordement, le long de l'onde, entre le nouveau mouvement et le mouvement primitif.

Prenons un nouveau système de variables indépendantes tel que x_3 et x_4 s'annulent, l'une, pour $\psi_0(a, b, c) = 0$, l'autre, le long de l'onde.

Opérons, d'autre part, un changement d'inconnues tel que la dernière d'entre elles soit remplacée par la fonction $\psi(x, y, z, t)$. Donnons-nous alors :

Pour $x_3 = 0$, la condition que cette inconnue soit nulle ;

Pour $x_4 = 0$, la condition que toutes les inconnues aient les mêmes valeurs que dans le mouvement primitif ainsi que les dérivées premières de deux d'entre elles, celles qui ne se réduisent pas à 0 avec x_3. S'il en est ainsi, la coïncidence s'établira d'elle même pour les dérivées de la troisième inconnue d'après un raisonnement tout semblable à celui qui a été fait plus haut (n° **320**), de sorte que la discontinuité sera bien du second ordre, la seule condition pour cela étant que cette coïncidence existe aux points qui satisfont à la fois à $x_3 = 0$ et à $x_4 = 0$, c'est-à-dire que la vitesse normale de la paroi soit initialement égale à celle des molécules voisines du fluide. (Il suffira d'appliquer la proposition énoncée au n° **321**[bis].)

Le problème ainsi posé rentre dans la catégorie traitée au n° **323**. Il reste seulement à s'assurer :

1° que l'intersection des deux multiplicités ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) n'est pas tangente à une bicaractéristique. — Ceci est évident, puisque cette intersection correspond à $t =$ const., alors que t varie sur les rayons définis par les équations du n° **296**.

2° que, si A, B, C, A', B', C' ont la signification indiquée au n° **321**, on a l'inégalité (54). Ceci revient à dire qu'on ne peut pas former, avec les équations du problème, une combinaison faisant connaître la dérivée seconde de ψ par rapport à x_4 : ou, ce qui revient au même, l'expression

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Mais, dans le cas contraire, la discontinuité compatible avec ces équations serait forcément tangentielle et nous savons qu'il n'en est pas ainsi.

Le problème d'analyse auquel nous avons été conduits est donc bien celui qui a été résolu tout à l'heure. La solution ainsi obtenue satisfera d'ailleurs initialement au principe d'impénétrabilité (c'est-à-dire que a, b, c

pourront être exprimés en fonction de x, y, z, t) lorsque la vitesse normale de la paroi sera inférieure à la vitesse du son.

326. — Par contre, le problème de la rencontre des ondes, traité au n° **320** dans l'hypothèse d'un potentiel de vitesse, n'est pas, en général, immédiatement résolu par des considérations semblables aux précédentes.

Soient, en effet, deux mouvements 1 et 2 (*fig.* 21) donnés, et soit à chercher un mouvement 4 se propageant dans les deux premiers suivant les ondes $\mathcal{S}_0''$ et $\mathcal{S}_0'''$ (*fig.* 21) qui se coupent suivant la multiplicité Λ.

Nous pourrons, en vertu de ce qui précède, après avoir effectué un changement d'inconnues convenable ayant pour effet de substituer à x, y, z de nouvelles inconnues ξ, η, ζ, déterminer celles-ci par les équations internes du mouvement et par les conditions suivantes :

1° sur $\mathcal{S}_0''$, λ devront prendre les mêmes valeurs que dans le mouvement 1 ;

2° sur la même multiplicité, les dérivées premières de ξ et de η auront également les valeurs qui résultent du mouvement 1 ;

3° sur $\mathcal{S}_0'''$, ζ prendra les mêmes valeurs que dans le mouvement 2.

De ces conditions résultera, comme précédemment, la continuité des dérivées de ζ au passage de $\mathcal{S}_0''$.

Mais il resterait à établir la continuité de ξ, η et de toutes les dérivées premières au passage de $\mathcal{S}_0'''$; et cette continuité ne résulte nullement de 3°. Elle entraîne, en effet, cinq conditions à vérifier en chaque point de $\mathcal{S}_0'''$ et l'unique équation différentielle dont nous connaissions l'existence sur cette multiplicité (l'équation **30**) entraîne simplement cette conséquence que ces cinq conditions se réduisent à quatre.

Si l'on développe par la formule de Taylor, suivant les puissances croissantes de $t - t_0$ (en désignant par t_0 la valeur de t qui correspond au point considéré de Λ) les premiers membres de ces quatre conditions et que l'on égale à 0 les coefficients successifs, on aura une série de conditions de compatibilité de tous les ordres qui devront être vérifiées en chaque point de rencontre des deux ondes : faute de quoi les nouvelles discontinuités seraient nécessairement en nombre supérieur à deux. Si, par exemple, il s'agit du problème de l'Hydrodynamique, aux deux ondes $\mathcal{S}_0''$ et $\mathcal{S}_0'''$ se joindrait une discontinuité stationnaire ayant lieu suivant la surface de rencontre, c'est-à-dire suivant la projection de Λ sur un plan $t =$ const.

Seulement on doit tenir compte de ce fait que dans les conditions où nous nous sommes placés au n° **312**, les discontinuités qui existent entre les mouvements 1 et 2 ne sont pas quelconques. On suppose en effet, qu'avant la production du phénomène qui nous occupe, il n'existait que

deux ondes S_0 et S'_0 et, entre elles, un mouvement unique, le mouvement 3. Ceci revient à dire que l'on a des conditions de compatibilité analogues à celles qu'il s'agit de vérifier, mais relatives aux multiplicités S_0 et S'_0. Il resterait à chercher si l'on peut en déduire les mêmes conditions pour S_0' et S_0''. C'est d'ailleurs ce qu'on constate en général sans difficulté pour les conditions du second ordre.

C'est d'autre part, ce qui a lieu certainement pour les dérivées d'un ordre quelconque) par rapport à t seul, en vertu du théorème auquel nous avons fait l'allusion au n° **219** et sur lequel nous revenons dans la note III à la fin de l'ouvrage.

327. — Nous venons de considérer le cas d'une caractéristique annulant le déterminant H sans annuler ses mineurs. Les résultats analogues relatifs à l'hypothèse contraire (celle du n° **299**) apparaissent d'eux-mêmes. Il est clair que, moyennant un changement d'inconnues, on pourra considérer les équations données comme résolues par rapport à p_{nn}, $q_{n\,n-1}$, $r_{n\,n-1}$, les expressions ainsi obtenues pour ces quantités étant telles que leurs dérivées par rapport à q_{nn}, r_{nn} soient nulles à l'origine.

Dans ces conditions, on pourra se donner les valeurs des trois inconnues et de r_n pour $x_n = 0$ et celles des deux premières inconnues pour $x_{n-1} = 0$. La solution du problème ainsi posé s'étudiera par des procédés tout semblables à ceux du n° **323**.

Il est à observer que ce résultat est indépendant de l'hypothèse faite au n° **299** sur les caractéristiques voisines de celles que l'on considère [1]. Elle suppose, toutefois, bien entendu, des conditions d'inégalité analogues à celles du n° **322**, mais qui n'auront plus la même signification géométrique, les bicaractéristiques pouvant n'être plus définies.

§ 3. — CAS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

328. — Parmi les systèmes d'équations appartenant à la catégorie que nous venons de considérer, il y a lieu d'envisager en particulier le cas des équations linéaires. C'est à elles qu'on est ramené toutes les fois qu'au lieu

---

[1] L'évanouissement simultané des mineurs de H peut même n'avoir lieu qu'en un seul point de celle-ci, l'origine des coordonnées.

d'étudier les mouvements les plus généraux des corps, on se borne aux mouvements infiniment petits.

C'est, par exemple ainsi qu'on est amené à la plus simple (après l'équation de Laplace) et la plus importante de ces équations, savoir :

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Delta\Phi, \tag{62}$$

où a est un nombre donné lequel représentera, en vertu des formules établies dans ce qui précède la vitesse de propagation d'une onde dans un mouvement régi par cette équation. C'est à celle-ci $\left(\text{avec } a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho = \rho_0}\right)$ que se réduit l'équation (**23'**) du n° **290** (équation du mouvement d'un gaz lorsque ce mouvement dépend d'un potentiel des vitesses), si l'on suppose le mouvement infiniment peu différent du repos, c'est-à-dire les dérivées de Φ infiniment petites, de manière qu'on puisse négliger les termes du second ordre en ces quantités.

329. — D'une manière générale, on aperçoit immédiatement une simplification notable apportée dans la détermination des caractéristiques par l'hypothèse que l'équation est linéaire.

Les coefficients a_{ik} sont alors, en effet, des fonctions des seules variables indépendantes $x_1, x_2, \dots x_n$ et ne contiennent plus, contrairement à ce qui arrive dans le cas général, ni la fonction inconnue, ni ses dérivées premières. Il en résulte (n° **283**) que les caractéristiques peuvent être définies, abstraction faite de toute solution déterminée de l'équation. En particulier, à chaque point $(x_1, x_2, \dots x_n)$ correspond un conoïde caractéristique parfaitement déterminé dès que l'on a écrit l'équation.

Il est clair que, chaque fois qu'on résoudra relativement à celle-ci un des problèmes aux limites qui se posent en mécanique, la formule de résolution devra faire intervenir le conoïde caractéristique lorsque celui-ci sera réel. Nous avons vu, en effet, (n° **306**) qu'il suffit de s'être donné les éléments qui déterminent cette solution à l'intérieur du conoïde caractéristique ayant pour sommet un point déterminé O (*fig.* **20**) pour la connaître en O.

330. — Lorsque le milieu considéré est illimité et qu'on donne dans tout l'espace, les positions et les vitesses des molécules à un instant déterminé t_0, la détermination du mouvement ultérieur conduit au problème de Cauchy dont nous nous sommes occupés dans ce qui précède. La résolution de ce problème a pu être effectuée dans un assez grand nombre de cas.

Notre intention n'est pas d'exposer en détail ces solutions [1] : nous nous contenterons d'indiquer le principe commun sur lequel elles reposent, et qui n'est autre que la généralisation de la méthode de Riemann, telle que nous l'avons rappelée au n° **171**.

Il est tout d'abord aisé d'écrire dans le cas général, la formule qui correspond à la relation (35) du n° **171** pour l'équation à deux variables à caractéristiques réelles (ou à la formule analogue de la théorie du potentiel). Si

$$(63) \qquad \mathcal{F}(z) = \sum_{i,k} a_{ik} p_{ik} + \sum_{i} a_i p_i + lz = 0$$

est l'équation linéaire donnée, les a_{ik}, les a_i et l étant les fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, une série d'intégrations par parties évidentes permettra d'écrire

$$(64) \qquad u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial M_n}{\partial x_n},$$

en posant

$$(65) \qquad M_i = u \sum_k a_{ik} p_k - z \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik} u) + a_i u z,$$

$$(66) \qquad \mathcal{G}(u) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik} u) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u) + lu.$$

L'équation $\mathcal{G}(u) = 0$ sera encore dite l'*adjointe* de la proposée.

Il est, d'ailleurs clair que le résultat précédent n'est nullement particulier au cas d'une équation du second ordre et qu'on peut l'obtenir quelque soit l'ordre de l'équation proposée.

Il s'étend d'ailleurs tout aussi aisément à un système d'un nombre quelconque p d'équations à un nombre égal d'inconnues, en introduisant, dans le *système adjoint*, p nouvelles fonctions $u_1, u_2, \ldots u_p$ par lesquelles on

---

[1] Voir surtout Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques* (lu à l'Ac. des Sc. le 19 juillet 1819) ; Kirchhoff, mécanique, 23e leçon, p. 314 ; *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, Sitzungsberichte der K. Ak. der Wiss. ; 1882, p. 641 et suiv. (trad. par Duhem, Ann. Éc. Norm. supérieure, 18.. et Optik ; Volterra, Att. Lincei, 1892 et Acta Math ; Tedone, Att. Lincei, 18.. ; Le Roux, Ann. Éc. Norm., 3e série, t. XII et journ. de Mathém. 1898-1900 ; d'Adhémar, Bull. Soc. Math. Fr. 1901 et C. R. Ac. Sc. 1902 ; Coulon, Soc. Sc. Phys. et Nat. de Bordeaux, *passim* et thèse *sur l'intégration des équations aux dérivées partielles par la méthode des caractéristiques*, Paris, Hermann (1902).

multipliera respectivement les premiers membres des équations données.

Nous nous bornerons toutefois au cas d'une seule équation du second ordre. Nous nous placerons même souvent pour la commodité du langage, dans le cas d'une équation à trois variables indépendantes, mais les raisonnements seront sauf indication contraire applicables, quel que soit le nombre de ces variables.

331. — Pour résoudre le problème de Cauchy relatif à notre équation, l'inconnue et ses dérivées étant données sur une certaine multiplicité, nous devrons supposer, conformément à ce qui précède, que cette multiplicité n'est pas tangente à une caractéristique.

En général [1], lorsque le problème de Cauchy se pose en physique mathématique, une condition plus précise est vérifiée, celle même que nous avons déjà rencontrée au n° **305**. Nous plaçant toujours dans le cas de trois variables le plan tangent à la multiplicité en question est *extérieur* au cône caractéristique : un plan parallèle à celui-là coupe toujours ce cône suivant une courbe fermée.

Un fait tout analogue a lieu pour les équations à plus de trois variables indépendantes. Par exemple dans la plus importante de celles-ci l'équation à quatre variables (**62**), la forme quadratique qui, égalée à 0, fournit l'équation du cône caractéristique est une somme de carrés, tous de même signe, à l'exception d'un seul, lequel porte sur le paramètre π_4 correspondant à la variable t. Or, le problème de Cauchy se pose précisément alors relativement à la multiplicité $t = 0$: celle-ci est coupée par le cône caractéristique ou, plus généralement, *par le conoïde caractéristique, ayant pour sommet un point extérieur quelconque suivant une multiplicité fermée* (savoir, en l'espèce, suivant une sphère).

Les données relatives aux points intérieurs à cette multiplicité fermée sont, nous le savons, les seules qui interviennent dans la détermination de la valeur de l'intégrale au sommet du conoïde.

332. — Considérons donc (dans le cas de trois variables) une surface S située comme nous venons de l'expliquer par rapport aux conoïdes caractéristiques et le long de laquelle nous nous donnerons les valeurs de l'inconnue et de ses dérivées premières.

Soit S_1 une autre surface délimitant avec la première une portion C de

---

[1] Comparer plus loin, n° 340.

l'espace. Si, dans celle-ci, la fonction u, solution de l'équation adjointe, est régulière, nous pourrons, en multipliant par l'élément de volume et intégrant dans $\mathcal{C}$, écrire, d'après le théorème de Green [1]

$$
(67)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int\!\!\int\!\!\int u\mathcal{F}(z)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \\
&= \int\!\!\int M_1\,dx_2\,dx_3 + M_2\,dx_3\,dx_1 + M_3\,dx_1\,dx_2 \\
&= \int\!\!\int \pm\left[M_1\frac{D(x_2,x_3)}{D(\lambda_1,\lambda_2)} + M_2\frac{D(x_3,x_1)}{D(\lambda_1,\lambda_2)} + M_3\frac{D(x_1,x_2)}{D(\lambda_1,\lambda_2)}\right]d\lambda_1\,d\lambda_2.
\end{aligned}
\right.
$$

(où l'intégrale double est étendue successivement à S et à S_1 et où λ_1, λ_2 désignent des coordonnées curvilignes prises sur ces surfaces) ; ou, si l'on veut,

$$
(68)\quad \int\!\!\int\!\!\int u\mathcal{F}(z)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int\!\!\int\left[\sum_i M_i\cos(N, x_i)\right]dS
$$

où dS désigne successivement l'élément superficiel de S et celui de S_1 et N, la normale correspondante dirigée *extérieurement à* $\mathcal{C}$. Rien d'essentiel ne sera changé à ce qui précède si le nombre n des variables indépendantes est supérieur à trois. La seule difficulté qui se présentera sera l'introduction de la géométrie à n dimensions. Au lieu des surfaces S et S_1 on aura à considérer des multiplicités $n - 1$ fois étendues ou *hypersurfaces* : la formule (67) deviendra

$$
(67')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int\!\!\int\cdots\int u\,F(z)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\ldots\,dx_n \\
&= \int\!\!\int\cdots\int\left(\sum_i M_i\pi_i\right)d\lambda_1\,d\lambda_2\,\ldots\,d\lambda_{n-1}
\end{aligned}
\right.
$$

(où le premier membre est une intégrale n^{uple} et le second une intégrale

---

[1] Voir Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. I, 1re partie, chap. IV, n° 15 et [illegible] et chap. V, n° 8.

$n - 1^{uple}$). Dans cette formule les quantités π_i sont, au signe près, les déterminants fonctionnels de $n - 1$ quelconques des x_i par rapport aux $n - 1$ coordonnés curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ choisies sur la multiplicité S (ou S_1) : autrement dit, si par chaque point de celle-ci on mène une ligne dont s désigne l'arc, les quantités π_i sont définies par la condition que l'on ait, quelle que soit cette ligne

$$(69) \qquad \pi_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + \pi_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + \dots + \pi_n \frac{\partial x_n}{\partial s} = \pm \frac{D(x_1, x_2, \dots x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}, s)}.$$

Ces quantités peuvent être considérées comme celles que nous avons désignées sous ce nom au n° **287**. Elles sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à dS, ou aux dérivées partielles du premier membre $\Pi(x_1, \dots x_2, x_n)$ de l'équation de la multiplicité.

Si la normale N est dirigée intérieurement au domaine $\mathfrak{T}$, ou si la fonction Π est positive à l'extérieur de ce domaine et négative à l'intérieur, le signe à prendre dans l'équation (**67**) ou dans l'équation (**69**) est tel que les π_i soient égaux aux cosinus directeurs ou aux dérivées partielles dont il vient d'être question, à un même facteur *positif* près.

Nous désignerons encore par A l'expression

$$(18) \qquad A = \sum a_{ik} \pi_i \pi_k$$

de sorte que les caractéristiques sont définies par l'équation $A = 0$. On aura

$$(70) \qquad \sum a_{ik} \pi_k = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \pi_i}$$

et, par conséquent,

$$(71) \left\{ \begin{aligned} \sum_i M_i \pi_i &= u \left[\sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial z}{\partial x_i} \pi_k + \left(\sum_i a_i \pi_i \right) z \right] - z \sum_{ik} \pi_k \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik} u) \\ &= \frac{1}{2} u \sum \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} - \frac{1}{2} z \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} + Luz \end{aligned} \right.$$

$$(72) \qquad L = \sum a_i \pi_i - \sum \pi_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}.$$

Introduisons maintenant, avec M. d'Adhémar [1], la direction qui a ses

---

[1] *C. R. Ac. Sc.*, 11 février 1901.

cosinus directeurs proportionnels aux quantités $\frac{\partial A}{\partial \pi_i}$, et qui sera dite la *conormale* à dS : autrement dit, la direction définie par les proportions

$$(73) \qquad \frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_n}} = \frac{1}{h}\, ds,$$

s étant un paramètre et h une quantité arbitraire dont nous pourrons, par exemple, disposer de manière que le plus grand des rapports $\frac{\pi_1}{h}, \frac{\pi_2}{h}, \dots, \frac{\pi_n}{h}$ — et, par conséquent le plus grand des rapports $\frac{dx_1}{ds}, \dots \frac{dx_n}{ds}$ (¹ — ait sa valeur absolue comprise entre deux limites positives, finies et différentes de zéro (par exemple, en prenant pour $\frac{dx_1}{ds}, \dots, \frac{dx_n}{ds}$ les cosinus directeurs de la direction précédente).

D'après sa définition même, la conormale est (²) le diamètre conjugué du plan tangent à dS par rapport au cône caractéristique (représenté par l'équation tangentielle $A = 0$).

Elle est tangente à l'élément dS lorsque celui-ci est caractéristique et dans ce cas seulement (comme on le voit en multipliant les termes des fractions (73) respectivement par $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$ et ajoutant) : elle n'est alors autre que la direction bicaractéristique tangente à cet élément.

Moyennant la dénomination précédente et la formule 71), l'équation (67' s'écrit

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int\int\int\cdots\int u\mathcal{F}(z)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n \\ \displaystyle = \int\int\cdots\int \left[h\left(u\frac{dz}{ds} - z\frac{du}{ds}\right) + Luz\right] d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_{\dots} \end{array}\right.$$

333. — Si nous voulons déterminer la fonction u et la multiplicité S_1 de manière que les valeurs de u et de ses dérivées sur S_1 s'éliminent du

(¹) Du moins en supposant que la forme quadratique A a son discriminant différent de zéro dans le domaine considéré et, en tout cas, sur toute caractéristique simple.

(²) Voir Coulon, thèse, p. 35.

résultat, il faudra tout d'abord, si u et ses dérivées ne sont pas nulles sur cette même multiplicité [1], que celle-ci soit caractéristique. Sans cela, en effet, la formule précédente contiendrait, d'une part les valeurs de z, et d'autre part celles de sa dérivée conormale, lesquelles seraient entièrement indépendantes les unes des autres, puisque la conormale serait extérieure à la surface.

Supposons donc que S_1 soit caractéristique, et, prenant d'abord le cas de $n = 3$, rapportons S_1 à des coordonnées curvilignes dont l'une λ soit constante sur les bicaractéristiques, tandis que l'autre s définira la position d'un point variable sur chacune de ces courbes, les dérivées $\frac{dx_i}{ds}$ étant toutes finies et non toutes infiniment petites, d'après la convention faite sur h au n° précédent. Alors dans le second membre de (**74**), la portion relative à S_1, savoir.

$$\int\int \left[h\left(u\frac{dz}{ds} - z\frac{du}{ds}\right) + Luz\right] d\lambda\, ds \tag{75}$$

pourra se transformer par intégration par parties en une intégrale simple

$$\int huz\, d\lambda \tag{76}$$

prise le long du contour Γ de S_1, jointe à la suivante

$$\int\int z\left[2h\frac{du}{ds} + u\left(\frac{dh}{ds} - L\right)\right] d\lambda\, ds. \tag{77}$$

[1] D'autre part, u (s'il n'est pas identiquement nul) ne peut s'annuler en même temps que ses dérivées premières sur S_1, sans que celle-ci soit caractéristique. La solution du problème de Cauchy est, en effet, unique pour une multiplicité non caractéristique : c'est ce que nous avons établi précédemment en supposant l'inconnue analytique et holomorphe. Pour u continu et dérivable jusqu'à un certain ordre, mais non analytique, le même fait résulterait de l'extension (au cas de n variables indépendantes) d'une démonstration de M. Holmgren (Voir la note I à la fin de l'ouvrage).

Resterait enfin le cas où S_1 serait pour u une multiplicité singulière. Mais ainsi que nous le verrons plus loin (n° **342**), ce cas ne peut pas non plus se présenter (du moins pour les types usuels de singularité) si S_1 n'est pas caractéristique.

Nous choisirons la fonction u de manière à ce qu'elle vérifie, sur chaque bicaractéristique, l'équation différentielle

$$(78) \qquad 2h\frac{du}{ds} + u\left(\frac{dh}{ds} - \mathrm{L}\right) = 0,$$

laquelle détermine u par une quadrature sauf un facteur constant qu'on peut choisir arbitrairement pour chaque valeur de λ.

Tout ceci subsiste évidemment pour n quelconque. Il y aura seulement $n-2$ coordonnées λ (la coordonnée s restant unique) et le contour Γ de S ne sera plus une courbe, mais une multiplicité $n-2$ fois étendue. L'intégrale relative à S_1 se réduira à une intégrale $n - 2^{uple}$

$$(76') \qquad \int\int \cdots \int huz\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-2}$$

prise suivant Γ, jointe à une intégrale analogue à (77), laquelle disparaîtra du moment que nous déterminerons u par l'équation différentielle (78).

331. — Nous avons laissé jusqu'ici la caractéristique S_1 quelconque. Supposons maintenant qu'on ait pris pour S_1 le conoïde caractéristique C ayant pour sommet un point déterminé O.

Dans ce cas, il résulte de l'équation (78) que u devra être infini en O. En effet, supposons, pour fixer les idées, que le paramètre s soit choisi sur chaque bicaractéristique, de manière à s'annuler en ce point. Alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devant être égaux aux coordonnées de O pour $s = 0$, quels que soient les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}$, leurs dérivées par rapport à ces paramètres sont nulles avec s, par conséquent, de l'ordre de s. Les déterminants fonctionnels ϖ de $n-1$ quelconques des coordonnées x par rapport aux $n-2$ paramètres λ et à s sont donc de l'ordre de s^{n-2} et il en est de même de L ainsi que de h si comme nous en avons convenu plus haut nous prenons cette quantité de l'ordre du plus grand des ϖ_i.

Par exemple, pour $n = 3$, il est clair que, les points d'un cône étant représentés par leur distance au sommet et un paramètre qui définit la génératrice, l'élément superficiel du cône contiendra en facteur la première de ces deux quantités.

h étant de l'ordre du plus grand des ϖ_i, le rapport $\frac{\mathrm{L}}{h}$ est fini en O. La

ure à laquelle conduit l'équation différentielle (**78**), soit

$$u = e^{\int -\frac{1}{2h}\left(\frac{dh}{ds} - L\right) ds} = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{\int \frac{L}{2h} ds}$$

lors un résultat infini de l'ordre $s^{\frac{n-2}{2}}$.

ces conditions, pour appliquer la formule fondamentale, nous ierons de notre volume d'intégration la partie qui avoisine imméint le point O. En nous encore dans le cas de une petite portion du C sera ainsi enletion limitée par une γ (*fig.* 22) : on peut :er les idées, admettre est l'intersection du C par une sphère Σ :e O et de rayon très

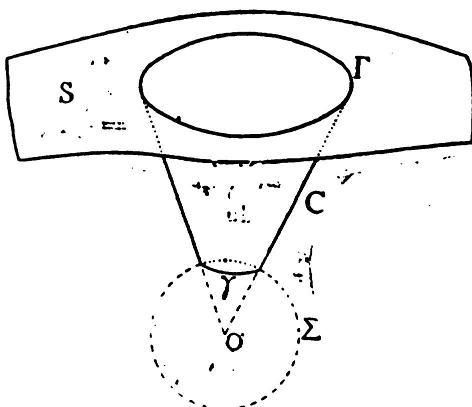


Fig. 22

ura alors deux fronson intersection Γ et la multiplicité γ. long de ces deux frontières que devra être prise l'intégrale ile (**76**) à laquelle se réduit (**74**) moyennant l'équation différen'8).

ng de Γ cette intégrale, est connue, puisqu'on connait z et ses dépremières.

rait donc l'expression de z par la généralisation naturelle de la de Riemann si, la fonction u étant régulière dans tout le volume ation à l'exception du voisinage de O, et le rayon de Σ tendant vers ntégrale (**67**') étendue à Σ, augmentée de l'intégrale (**76**') étendue éduisait à z_0.

. — Mais les choses ne se passent point ainsi. Considérons, par ;, l'équation (**62**). C'est, dans la catégorie d'équations que nous eons en ce moment, la première pour laquelle le problème de ait été résolu, grâce aux travaux de Poisson et de Kirchhoff. Les es indépendantes sont alors au n... de quatre, dont les trois pre-

mières, qui représentent des coordonnées cartésiennes dans l'espace ordinaire, seront nommées x_1, x_2, x_3, tandis que la quatrième continuera à être désignée par t. Nous supposerons que S a pour équation $t = 0$, de sorte qu'on devra se donner, pour $t = 0$, les conditions

$$z = f$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1$$

où f et f_1 sont des fonctions connues de x_1, x_2, x_3.

La méthode employée pour exprimer, en fonction de ces données, la valeur de z pour $x = x^0_1$, $x_2 = x^0_2$, $x_3 = x^0_3$, $t = t_0$, consiste à prendre

$$u = \frac{1}{r} F(r + at)$$

F étant une fonction quelconque et r désignant la distance (comptée dans l'espace ordinaire) du point (x_1, x_2, x_3) au point (x^0_1, x^0_2, x^0_3) :

$$r = \sqrt{(x_1 - x^0_1)^2 + (x_2 - x^0_2)^2 + (x_3 - x^0_3)^2}.$$

Cette quantité satisfait bien à l'équation adjointe, identique ici à la proposée elle-même. Elle vérifie également, quelle que soit la fonction F, la condition (78) : elle est en effet, sur le cône caractéristique, proportionnelle à $\frac{1}{r}$ et c'est précisément une telle proportionnalité qu'indique l'équation différentielle (78).

Seulement, cette fonction n'est pas uniquement singulière (comme le voudrait la théorie précédente) en un seul point de l'espace à quatre dimensions. Elle est, en effet, infinie pour $x_1 = x^0_1$, $x_2 = x^0_2$, $x_3 = x^0_3$, quel que soit t et non pas uniquement pour la valeur t_0 donnée qui correspond au sommet O du cône caractéristique. Nous devrons donc retrancher de notre volume d'intégration, non pas exclusivement le voisinage immédiat du sommet du cône, mais, par exemple, l'ensemble τ des points (x_1, x_2, x_3) satisfaisant à l'inégalité

$$(x_1 - x^0_1)^2 + (x_2 - x^0_2)^2 + (x_3 - x^0_3)^2 < \varepsilon^2.$$

Conformément à la convention du n° **100**bis, cette région est représentée sur la figure 23, par l'intérieur d'un cylindre τ (auquel elle se réduirait si l'on n'avait à considérer que les coordonnées x_1, x_2 et t, la variable x_3 étant supprimée).

La frontière σ de la région τ interceptera, sur notre cône, la multiplicité γ

(qui ne sera autre que la surface d'une sphère de rayon ε, avec $t = t_0 - \frac{\varepsilon}{a}$) et sur S une multiplicité γ' (sphère de rayon ε avec $t = 0$).

Le polynôme $\mathcal{F}(z)$ ayant ici l'expression

$$\mathcal{F}(z) = \Delta z - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

et le conoïde caractéristique étant

$$(x_1 - x^0_1)^2 + (x_2 - x^0_2)^2 + (x_3 - x^0_3)^2 - a^2 (t - t_0)^2 = 0$$

les bicaractéristiques correspondantes ne sont autres que les génératrices.

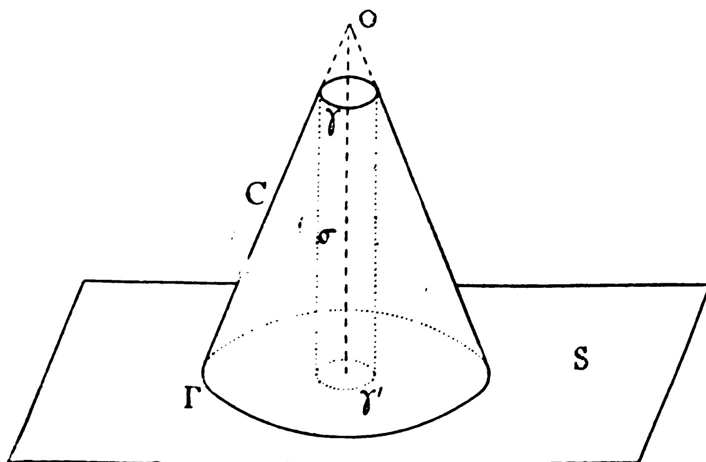


Fig. 23

Nous obtiendrons donc sur C, le système de coordonnées curvilignes exigé par les raisonnements précédents en employant (dans l'espace ordinaire) les coordonnées polaires d'origine O, c'est-à-dire en posant

$$x_1 = x^0_1 + r \sin \lambda_1 \cos \lambda_2, \quad x_2 = x^0_2 + r \sin \lambda_1 \sin \lambda_2, \quad x_3 = x^0_3 + r \cos \lambda_1,$$
$$(0 < \lambda_1 < \pi, \quad 0 < \lambda_2 < 2\pi).$$

Nous pourrons alors prendre $s = r$, et l'on trouvera aisément

$$h = \frac{r^2 \sin \lambda_1}{a}.$$

Dans ces conditions, u étant donné par la formule (79), l'intégrale

triple relative à S_1 se réduira, en vertu des calculs précédents, à l'intégrale double

$$\iint \frac{r^2uz}{a} \sin\lambda_1\, d\lambda_1\, d\lambda_2 = \iint \frac{r^2uz}{a}\, d\Omega \tag{80}$$

($d\Omega = \sin\lambda_1\, d\lambda_1\, d\lambda_2$ étant un élément de sphère de rayon 1) étendue successivement aux multiplicités Γ et γ.

L'intégrale relative à S prend une forme particulièrement simple lorsque (comme nous le supposons) cette multiplicité a pour équation $t = 0$. Si nous désignons par $\varphi(r)$ et $\varphi_1(r)$ les valeurs moyennes pour $t = 0$, sur une sphère de centre (x^0_1, x^0_2, x^0_3) et de rayon r, des fonctions f et f_1 auxquelles se réduisent z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, soit

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi}\iint f(x^0_1 + r\sin\lambda_1\cos\lambda_2,\ x^0_2 + r\sin\lambda_1\sin\lambda_2,\ x^0_3 + r\cos\lambda_1) \sin\lambda_1\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi}\iint f_1(x^0_1 + r\sin\lambda_1\cos\lambda_2,\ x^0_2 + r\sin\lambda_1\sin\lambda_2,\ x^0_3 + r\cos\lambda_1) \sin\lambda_1\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

cette intégrale devient

$$\frac{1}{a^2}\iiint \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \frac{4\pi}{a^2}\int_0^{at_0} r\left[F(r)\,\varphi_1(r) - aF'(r)\,\varphi(r)\right] dr$$

ou, moyennant une intégration par parties évidente

$$\frac{1}{a^2}\iiint \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= -4\pi t_0 F(at_0)\,\varphi(at_0) + \frac{4\pi}{a} F([illegible])\,\varphi([illegible]) + \frac{4\pi}{a^2}\int_0^{at_0} F(r)\left[r\varphi_1(r) + a\frac{d}{dr}(r\varphi(r))\right] dr.$$

pression dont le premier terme — $4\pi t_0 F(at_0)\varphi(at_0)$ vient précisément truire l'intégrale (**80**) relative à Γ.

Si maintenant ε tend vers zéro, le second terme de l'expression précénte devient aussi infiniment petit et il en est de même de l'intégrale (**80**) lative à γ, puisque r^2u tend vers zéro avec r.

Considérons enfin l'intégrale relative à σ. Cette intégrale est

$$\int\int\int\left(z\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial z}{\partial r}\right)\varepsilon^2\, d\Omega\, dt$$

l'intégration double est étendue à la surface d'une sphère de rayon ε $d\Omega$ étant l'élément d'aire de cette sphère) ; elle n'aura pas pour limite e quantité proportionnelle à z_0, mais bien $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right.$ ayant pour partie prin- ɔale $\left. -\frac{1}{r^2}F(at)\right)$ l'intégrale simple

$$-4\pi\int zF(at)\, dt$$

se de 0 à t_0, pour $x_1 = x^0_1$, $x_2 = x^0_2$, $x_3 = x^0_3$.

Il vient donc finalement

$$\int_0^{at_0}\frac{F(r)}{a^2}\left[r\varphi_1(r) + a\frac{d}{dr}(r\varphi(r))\right]dr - \int_0^{t_0} zF(at)dt = 0.$$

Mais ici le résultat se simplifie notablement grâce à ce fait que la fonc- n F, qui intervient dans les formules qui précèdent, est arbitraire. En ɜt, en changeant r en at dans la première intégrale, on peut écrire

$$(81)\qquad \int_0^{t_0} F(at)\left[t\varphi_1(at) + \frac{d}{dt}(t\varphi(at)) - z\right]dt = 0.$$

Or, ainsi qu'il résulte d'un raisonnement classique du calcul des variations, une égalité de la forme (**81**) ne peut pas avoir lieu quelle que soit fonction F, si l'on n'a pas pour toute valeur de t

$$t\varphi_1(at) + at\varphi'(at) + \varphi(at) - z = 0.$$

En particulier, ceci a lieu pour $t = t_0$, et l'on a

$$z_0 = \varphi(at_0) + t_0 \left[\varphi_1(at_0) + a\varphi'(at_0)\right]. \tag{82}$$

On voit qu'ici la valeur de z_0 est exprimée, non pas en fonction de toutes celles que prennent z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ sur S dans tout l'intérieur du conoïde caractéristique, mais seulement des valeurs prises par ces quantités *sur* ce conoïde ; Cette circonstance est dûe à la forme particulière de l'équation (**62**) et ne se présente pas pour une équation du second ordre prise au hasard [1].

336. — On remarquera que, de la forme même de la solution qui vient d'être obtenue, il résulte que la méthode ne pouvait pas réussir sous la forme primitive indiquée au n° **331**. Elle aurait, en effet, conduit à exprimer la solution sous forme d'une intégrale analogue au second membre de (**74**), c'est-à-dire portant sur les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$ dans toute la partie S_0 de S intérieure au conoïde caractéristique.

On pourrait bien, il est vrai, transformer l'intégrale (**82**) en une autre qui soit prise dans toute la région S_0, mais il faudrait pour cela que l'élément d'intégration contienne les dérivées de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$ par rapport aux coordonnées prises sur S (autrement dit, par rapport à x_1, x_2, x_3).

En un mot, le second membre de la formule (**82**) est irréductible à celui de (**74**).

Il ne peut donc exister de solution de l'équation (**62**) vérifiant les diverses conditions que nous avions postulées au n° **331**.

337. — Ces divers résultats ont été généralisés à des catégories assez étendues d'équations dans les travaux cités plus haut. Nous nous contenterons d'indiquer le cas le plus simple, celui de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \tag{83}$$

qui n'est autre que l'analogue de (**62**) pour le cas de deux dimensions et

[1] La supposition qu'on ait pris pour S la multiplicité $t = 0$ n'a évidemment rien d'essentiel et les considérations précédentes subsisteraient, avec des résultats un peu moins simples, pour S quelconque.

pour laquelle le problème de Cauchy (la multiplicité S vérifiant toujours les conditions imposées au n° **331**) a été résolu par M. Volterra. La fonction u, choisie par ce dernier, est alors celle qui se déduit de la quantité

$$\log\left(\frac{at + \sqrt{a^2t^2 - x^2_1 - x^2_2}}{\sqrt{x^2_1 + x^2_2}}\right) \tag{84}$$

en changeant x_1, x_2, t en $x_1 - x^0_1$, $x_2 - x^0_2$, $t - t_0$.

Elle admet, on le voit, le conoïde caractéristique comme surface singulière. Mais il est aisé de voir que cette singularité ne compromet pas l'application de notre formule fondamentale : la seule partie que l'on doive retrancher du volume d'intégration est encore celle qui est comprise à l'intérieur d'un petit cylindre ayant pour axe la droite

$$x_1 = x^0_1,\ x_2 = x^0_2.$$

La formule (**74**) fera alors connaître l'intégrale simple

$$\int z dt$$

prise suivant cette droite, de $t = 0$ à $t = t_0$.

Il ne restera plus qu'à prendre la dérivée de cette quantité par rapport à t_0 pour obtenir la valeur de z_0.

La solution obtenue ne peut plus, comme celle de l'équation (**62**), se mettre sous la forme d'une intégrale étendue à la partie de S située sur la *surface* du cône caractéristique : les valeurs des données dans tout l'*intérieur* de ce cône y figurent nécessairement.

Par contre, on peut faire sur cette solution des remarques toutes semblables du n° précédent et en déduire que la méthode ne pourrait pas réussir sous la forme indiquée au n° **334**.

338. — Qu'il s'agisse, d'ailleurs, du problème dont nous venons de parler ou de celui qui est relatif à l'équation (**62**), les considérations présentées jusqu'ici subsistent dans le cas limite où S est caractéristique : par exemple, on pourrait prendre pour S un conoïde caractéristique, en se contentant toutefois de déterminer z *à l'intérieur* de ce conoïde.

Dans ce cas, comme la conormale à S serait tangente à S, la connaissance des valeurs de z sur la multiplicité en question suffirait, puisqu'elle entraînerait celle de la dérivée conormale.

Ainsi, une intégrale de l'équation (**62**) ou de l'équation (**83**) est déterminée, à l'intérieur d'un conoïde caractéristique, quand on donne ses valeurs sur ce conoïde. En particulier, *elle ne peut s'annuler sur le conoïde* (sauf le cas de singularité, tel que nous l'avons, par exemple, rencontré pour l'expression (**84**), au n° précédent) *sans être identiquement nulle dans tout l'intérieur*.

Ce résultat correspond évidemment à celui que nous avons trouvé au n° **172** (ch. IV).

339. — Nous remarquerons également que la méthode s'étend d'elle-même au cas où l'équation linéaire a un second membre, c'est-à-dire où l'on égale le premier membre de l'équation (**63**) non plus à zéro, mais à une fonction donnée quelconque $\mathcal{F}$ de $x_1, x_2, \ldots x_n$. Dans ces conditions, l'intégrale n^{uple} qui figure au premier membre de l'équation (**74**) ne sera plus nulle, mais sa valeur sera connue. Pour l'équation (**62**), ceci conduirait à compléter la formule (**82**) par l'intégrale

$$\int\int\int \frac{\mathcal{F}}{r}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

étendue au conoïde caractéristique. Dans le cas de l'équation (**83**) on aurait à considérer, outre une intégrale double prise sur le conoïde caractéristique, une intégrale triple étendue au volume intérieur à ce cône.

340. — Dans tous les cas, un calcul direct montrera que les expressions obtenues par les méthodes précédentes vérifient bien toutes les conditions demandées, pourvu que la multiplicité S satisfasse aux hypothèses du n° **331**.

Le problème de Cauchy est donc, dans ce cas, toujours possible, que les données soient ou non analytiques.

Il n'en est plus de même si les hypothèses du n° **331** ne sont pas vérifiées, si la multiplicité S coupe le cône caractéristique issu d'un de ses points. C'est, par exemple, ce qui se présente dans la généralisation donnée par Kirchhoff (1) de la solution du n° **335** ou dans les recherches analogues développées par M. Volterra (2) sur l'équation (**83**).

(1) [illegible] Optik.
(2) Sur [illegible], n° 6. Acta Math., t. XVIII.

Pour de telles formes de S, le *problème de Cauchy cesse d'être possible n général.* C'est ainsi que, dans les solutions données par Kirchhoff et I. Volterra, apparaissent une infinité de conditions de possibilité. En réalité, lans les problèmes qu'ils ont traités, on peut, comme on s'assure aisément, e donner les données de Cauchy — c'est-à-dire z et ses dérivées premières — ur une partie seulement de S, z *seul* étant (comme aux n° **180-181** du h. IV) donné sur l'autre partie. Les formes correspondantes de S sont 'ailleurs telles que la démonstration de Cauchy-Kowalewski (relatif à 'existence de la solution pour des données analytiques n'est plus applicable.

Mais, même dans le cas où cette démonstration est possible — par exemple orsque, relativement à l'équation (**62**), on prend pour S la multiplicité $r_1 = 0$ — on constate que la possibilité du problème cesse en général, avec 'analyticité des données si la condition du n° **331** n'a pas lieu.

341. — Nous bornerons là les indications sur la résolution du problème le Cauchy et nous allons étudier une autre question présentant un rapport étroit avec celles qui ont fait l'objet des chapitres précédents.

Nous avons constaté que les ondes par lesquelles se propagent les discontinuités dans les milieux en mouvement ne sont autres que les caractéristiques des équations différentielles qui déterminent ces mouvements. Nous nous sommes placés, à cet effet, dans l'hypothèse formulée au n° **71** t d'après laquelle les quantités considérées et leurs diverses dérivées levaient toutes tendre vers des limites parfaitement déterminées de chaque côté de la discontinuité.

Il y a lieu de se demander si des conclusions analogues subsistent dans 'hypothèse contraire, c'est-à-dire en admettant qu'il y a non seulement liscontinuité entre deux mouvements compatibles, mais singularité de l'un le ces mouvements considéré en lui-même, quelques unes des inconnues ou de leurs dérivés devenant infinies. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la solution (**84**) de l'équation (**83**).

Les résultats auxquels nous parviendrons seront d'ailleurs importants en ce qu'ils nous permettront de relier la théorie des ondes telle que nous 'avons exposée dans les chapitres précédents, à celle que l'on rencontre ans diverses branches importantes de la Physique, particulièrement en Acoustique et en Optique.

On sait qu'alors, au lieu de considérer, comme nous l'avons fait, la propagation proprement dite du mouvement, c'est-à-dire la manière dont il *commence* successivement aux différents points de l'espace, on suppose ce mouvement déjà commencé et arrivé à une sorte d'état permanent. Dans

ces conditions, la définition de la surface d'onde, telle que nous l'avons envisagée dans ce qui précède, n'est plus applicable. Mais, d'autre part, le mouvement étudié n'est pas quelconque : c'est une oscillation périodique et la surface d'onde est alors le lieu des points de l'espace où la phase d'oscillation est la même. Comme précédemment, bien entendu, l'ensemble des faces d'onde correspondant à une même phase, lorsqu'on fait varier le temps, forme, dans l'espace E_4, une multiplicité triplement étendue qui représente la marche de l'onde et permet d'en définir la vitesse de propagation.

Nous verrons un peu plus loin pourquoi on est ainsi conduit aux mêmes ondes que dans la théorie d'Hugoniot, — à savoir aux caractéristiques — et nous verrons également s'introduire, comme possédant la propriété fondamentale des *rayons* tels qu'on les considère en Physique, les *bicaractéristiques* définies dans le présent chapitre.

312. — Admettons donc, avec M. Delassus, (1) qu'une équation linéaire du second ordre donnée

$$(83) \qquad \mathcal{F}(z) = \sum_{i,k} a_{ik} p_{ik} + \sum_{i} a_i p_i + lz = 0$$

possède une solution de la forme

$$(85) \qquad z = ZF(H)$$

où Z, H sont des fonctions régulières, — j'entends par là des fonctions finies, continues et dérivables — mais où la fonction F admet une singularité pour $H = 0$. Substituant cette quantité, il vient aisément

$$(86) \qquad AZF''(H) + \left(\sum_{i} \frac{\partial Z}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i} + MZ\right)F'(H) + \mathcal{F}(Z).F(H) = 0$$

les π_i étant les dérivées partielles de H et A étant toujours défini par l'équation (18) du n° **287**, pendant que F', F'' sont les dérivées première et seconde de la fonction F, et que l'on a

$$M = \sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i} a_i \pi_i = \mathcal{F}(H) - lH$$

(1) Ann. Scient. de l'Éc. Norm. Sup., 3e série, t. XIII, p. 357 et suiv. [illegible]

Nous n'allons point laisser la fonction F tout à fait quelconque : nous supposerons cette fonction telle que F' soit infiniment grand par rapport à F, et F'' par rapport à F', pour H voisin de 0. Cette condition est remplie par toutes les formes usuelles de fonctions d'une variable singulières à l'origine telles que

$$F(H) = H^p \qquad (p \text{ non entier positif}),$$
$$F(H) = \log H,$$
$$F(H) = H^p \log H.$$

Dans ces conditions, il est clair que le coefficient de $F''(H)$, dans l'équation (86) doit s'annuler avec H. On a donc (pour $H = 0$)

$$A = 0 \tag{87}$$

et *la multiplicité singulière* $H = 0$ *doit être une caractéristique* [1].

Il en serait encore de même si l'intégrale cherchée ne se composait pas exclusivement de l'expression (**85**), mais comprenait en outre un terme régulier quelconque.

343. — Inversement, étant donnée une multiplicité caractéristique $H = 0$, — telle, par conséquent, que le premier membre de l'équation s'annule avec H et que l'on ait

$$A = H\mathcal{A}$$

(où $\mathcal{A}$ est une nouvelle quantité régulière), — proposons nous de trouver à l'équation donnée une solution de la forme

$$z = ZF(H) + z_1, \tag{88}$$

z_1 étant une fonction régulière.

Nous prendrons pour fixer les idées

$$F(H) = \log H.$$

On aura alors $\frac{F''(H)}{F'(H)} = -\frac{1}{H}$.

---

[1] Cette conclusion ne serait pas en défaut si Z était nul avec H. Dans ce cas en effet, il conviendrait de recommencer le raisonnement en remplaçant Z par $Z_1 = \frac{Z}{H}$ et F(H) par HF(H).

Par conséquent, en écrivant que les termes de l'ordre de F' disparaissent, on aura (pour $\mathrm{H} = 0$) la condition

$$(89) \qquad \sum_i \frac{\partial Z}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i} + (M - \mathfrak{A})Z = 0.$$

Cette condition peut être considérée comme une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre à laquelle doit satisfaire la fonction Z. Il est clair [1] que *les caractéristiques de cette équation seront situées sur notre surface singulière et ne seront autres que les bicaractéristiques correspondantes.*

On voit, par conséquent, que la condition (**89**) est relative à la distribution des valeurs de Z lui-même (et non de ses dérivées) sur l'hypersurface $\mathrm{H} = 0$: si l'on pose, comme précédemment,

$$(14') \qquad \frac{dx_1}{\left(\dfrac{\partial A}{\partial \pi_1}\right)} = \frac{dx_2}{\left(\dfrac{\partial A}{\partial \pi_2}\right)} = \dots = \frac{dx_n}{\left(\dfrac{\partial A}{\partial \pi_n}\right)} = ds,$$

Z aura la valeur

$$(90) \qquad Z = Z_0 e^{\int (\mathfrak{A} - M)\, ds}$$

où Z_0 est un facteur indépendant de s, qu'on peut encore choisir arbitrairement en un point de chaque bicaractéristique.

Z étant ainsi choisi (et supposé d'ailleurs régulier), le premier membre de la condition (**89**) s'annulera avec H : il sera, par conséquent, de la forme

$$\mathrm{H}\varphi,$$

φ étant une fonction régulière.

Quant aux termes logarithmiques, la condition nécessaire et suffisante de leur disparition est évidemment que Z soit lui-même une solution de l'équation proposée.

S'il en est ainsi, il restera, pour déterminer z_1, l'équation

$$(91) \qquad \mathcal{F}(z_1) = -\varphi.$$

φ étant, comme nous l'avons dit, une fonction régulière, les théorèmes généraux nous apprennent [2] que cette équation admet une solution également régulière.

---

[1] Comparer n° **332**.

[2] Du moins dans le cas où tous les calculs sont analytiques.

Pour résumer, nous voyons qu'il faudra :

1° Choisir pour la multiplicité $\Pi = 0$ une caractéristique, conformément au théorème de M. Delassus ;

2° Calculer, sur cette multiplicité, la distribution des valeurs de Z par l'équation (**89**) ou, ce qui revient au même, par la formule (**90**).

3° Trouver une solution de l'équation proposée, prenant pour $\Pi = 0$ les valeurs ainsi calculées.

4° Déterminer une fonction régulière z_1 par l'équation (**91**).

Nous savons d'ailleurs, par ce qui précède, que si les calculs sont analytiques, l'opération 3° est possible d'une infinité de façons.

344. — Lorsque le nombre des variables indépendantes est de deux, les solutions logarithmiques ainsi obtenues jouent un rôle fondamental dans l'étude de l'équation, et cela tout particulièrement dans le cas où les caractéristiques sont imaginaires.

On peut alors (¹), par un changement de variables réel, mettre l'équation sous la forme

$$\mathcal{F}(z) = \Delta z + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \tag{92}$$

Δ désignant le symbole de Laplace à deux variables $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; a, b, c, des fonctions données de x et de y. Les caractéristiques sont, dans ces conditions, $x - iy =$ const. ; $x + iy =$ const.

Cherchons une solution uniforme qui devienne logarithmiquement infinie au voisinage d'un point donné (x_0, y_0).

Si nous supposons a, b, c analytiques, rien ne nous empêchera d'appliquer les raisonnements qui précèdent aux multiplicités

$$x - x_0 - i(y - y_0) = 0, \quad x - x_0 + i(y - y_0) = 0 ;$$

et, ce seront les logarithmes de $x - x_0 - i(y - y_0)$, d'une part, de $x - x_0 + i(y - y_0)$ de l'autre, qui interviendront dans la solution cherchée : celle-ci aura donc la forme :

$$Z \log\left[x - x_0 - i(y - y_0)\right] + Z' \log\left[x - x_0 + i(y - y_0)\right] + z_1.$$

(¹) Picard, *Traité d'Analyse*.

Mais on a

$$\log\left[x - x_0 - i(y - y_0)\right] = \log r - i\omega,$$
$$\log\left[x - x_0 + i(y - y_0)\right] = \log r + i\omega,$$

en désignant par r la distance des deux points (x_0, y_0), (x, y) et par ω l'angle que cette distance fait avec l'axe des x. Il est clair que la solution ne saurait être uniforme si ω n'en disparaît point, c'est-à-dire si l'on n'a pas identiquement

$$Z' = Z.$$

Nous avons donc finalement à trouver une solution Z de l'équation (**92**) définie par la double condition de prendre des valeurs données, pour $x - x_0 - i(y - y_0) = 0$ et des valeurs données pour $x - x_0 + i(y - y_0) = 0$, ces valeurs étant d'ailleurs toutes analytiques. C'est, comme nous l'avons vu, le problème qui a été résolu par M. Goursat et, pour le cas d'un plus grand nombre de variables, par Beudon.

Nous obtenons ainsi une solution de la forme

$$2Z \log r + z_1 \tag{93}$$

c'est-à-dire une des solutions dont l'existence a été établie par M. Picard dans le cas spécial où a et b sont nuls [1]. Seulement nous avons été obligés de nous borner aux équations à coefficients analytiques : non qu'il soit rien supposé à cet égard dans les développements du n° **343**, mais parce que nous les avons appliqués dans le domaine complexe. La méthode de M. Picard, au contraire, fondée sur des approximations successives, ne suppose rien sur la nature analytique des coefficients.

Observons toutefois que même pour a, b, c non analytiques, notre méthode conduit, dans des cas très généraux, au résultat cherché. Si, en effet, a, b, c admettent des dérivées jusqu'à un certain ordre p autour de (x_0, y_0), la formule de Taylor leur sera applicable autour de ce point, c'est-à-dire qu'on pourra les représenter par des polynômes α, β, γ en x, y, à des quantités près qui seront d'un ordre supérieur à p en $x - x_0$, $y - y_0$.

Remplaçons alors, pour un instant, a, b, c par α, β, γ. L'équation ainsi

[1] La méthode précédente a été obtenue d'une manière indépendante, par M. Hedrick (*Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen*, Göttingen, 1901) et par nous-même (voir *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard*, février 1901, et aussi *Congrès international des Mathématiciens* (Paris, 1900); Gauthier-Villars, 1902).

modifiée admettra une solution z' de la forme (**93**). Le résultat de substitution de z' dans l'équation donnée sera une quantité continue et dérivable jusqu'à l'ordre $p-1$. Il ne restera plus qu'à augmenter z' d'une quantité z'' définie par l'équation

$$\mathcal{F}(z'') = -\mathcal{F}(z'),$$

équation dont les théorèmes de M. Picard ([1]) permettent de trouver une solution régulière, en en indiquant l'ordre de dérivabilité.

La seule question — que nous n'entreprendrons d'ailleurs pas d'élucider — est de savoir si cet ordre est le plus élevé possible, étant données les hypothèses faites sur les coefficients.

Les intégrales de la forme (**93**) jouent dans l'étude de l'équation (**92**) le même rôle que la fonction $\log r$ dans l'étude de l'équation de Laplace. Considérons, en effet, l'adjointe de (**92**), savoir l'équation

$$\mathcal{G}(u) = \Delta u - \frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(bu) + cu = 0.$$

La formule fondamentale donne ici

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u)\right] dx\,dy$$

$$= \int_{S} \left\{ u\frac{dz}{dN} - z\frac{du}{dN} - \left[a\cos(N, x) + b\cos N, y)\right] zu \right\} ds$$

S étant la frontière du domaine plan $\mathfrak{C}$; s, l'arc de S ; N, la normale à S.

Mais l'équation $\mathcal{G}(u) = 0$ admet une solution de la forme (**93**). Supposons celle-ci choisie de manière que le coefficient 2 Z soit égal à 1 au point (x_0, y_0) (ce qui est possible, car, d'après nos calculs, Z est nécessairement différent de 0 en ce point) et choisissons la pour la fonction u.

En étendant l'intégration, d'une part à une courbe quelconque ([2]) S qui entoure le point (x_0, y_0) d'autre part, à un cercle de rayon très petit ayant

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, 5e série, tome VI, 1900 ; p. 138 et suivantes.

([2]) Ou même à un système de plusieurs courbes, pourvu que l'aire ainsi limitée comprenne (x_0, y_0).

pour centre ce point, on trouve, absolument comme dans la théorie du potentiel logarithmique ordinaire

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \left\{ u\frac{dz}{dN} - z\frac{du}{dN} + \left[a\cos(Nx) + b\cos(Ny)\right] zu \right\} ds = z(x_0, y_0).$$

Cette formule est entièrement analogue à celle que nous avons rappelée dans le ch. I (n° 1) : comme en cet endroit, nous pouvons évidemment en déduire les conséquences suivantes :

Une équation (**92**) *à coefficients analytiques n'admet que des solutions analytiques.*

Si deux solutions d'une équation (**92**) *à coefficients analytiques, définies de part et d'autre d'une ligne* L, *prennent sur cette ligne les mêmes valeurs et qu'il en soit de même de leurs dérivées normales, ces deux fonctions sont le prolongement analytique l'une de l'autre.*

Si enfin on se rappelle que le terme régulier z_1 qui figure dans la solution (**93**) peut être modifié par l'addition d'une solution régulière quelconque de l'équation proposée, on sera conduit à déterminer un tel terme additif pour la fonction u_1, de manière à ce que la solution correspondante

$$u = U \log r + u_1$$

de l'équation adjointe s'annule sur le contour S, ou de manière à ce que sa dérivée normale y soit constante. u jouera alors le rôle d'une véritable fonction de Green pour la résolution du problème de Dirichlet ou du problème de Neumann relatif à l'équation (**92**).

315. — On peut se demander ce que deviennent les calculs que nous venons d'effectuer lorsque l'équation a ses caractéristiques réelles.

Supposons alors les variables choisies de manière que ces caractéristiques soient $x =$ const., $y =$ const. Alors la quantité

$$\log r = \frac{1}{2}\left[\log\left[(x - x_0) - i(y - y_0)\right] + \log\left[(x - x_0) + i(y - y_0)\right]\right]$$

devra être remplacée au facteur 2 près par le logarithme du produit $(x - x_0)(y - y_0)$.

Or, les caractéristiques étant les parallèles aux axes, l'équation a (n° 181) la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Si elle doit admettre la solution

$$z = Z \log \left[(x - x_0)(y - y_0)\right] + z_1$$

la fonction Z, elle-même solution de l'équation, devra, en outre, vérifier sur les caractéristiques les relations (**89**), lesquelles se réduisent en l'espèce : sur la caractéristique $x = x_0$, à

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + aZ = 0 ;$$

sur la caractéristique $y = y_0$, à

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + bZ = 0.$$

Nous pouvons prendre encore $Z = 1$ pour $x = x_0$, $y = y_0$. Nous voyons alors que la fonction *Z n'est autre que la fonction de Riemann définie au* n° **171**.

346. — Lorsqu'on passe au cas de trois variables indépendantes, les solutions qu'il est important de considérer ne sont plus celles dont nous venons de parler, mais celles qui, aux environs de $r = 0$, sont infinies comme $\frac{1}{r}$.

Ceci conduirait à prendre, pour la fonction F précédemment introduite, la forme $F = \frac{1}{\Pi}$. Mais il est aisé de voir que si l'équation donnée et la caractéristique $\Pi = 0$ sont prises d'une manière quelconque, il n'existera pas, en général, d'intégrale de cette espèce.

Il suffit, pour cela, d'observer que, dans l'expression

$$z = \frac{Z}{\Pi} + z_1$$

singulière sur la multiplicité $\Pi = 0$, les valeurs prises par Z sur cette multiplicité déterminent à elles seules la singularité, attendu qu'en ajoutant à Z une fonction régulière qui s'annule avec Π et qui soit, par conséquent, de la forme $\Pi\mathfrak{Z}$, on ne modifie l'expression z que de la quantité régulière $\mathfrak{Z}$.

Or, une fois le coefficient de F'', — c'est-à-dire de $\frac{2}{\Pi^3}$, — annulé grâce au choix de Π, il reste à faire disparaître les termes en $\frac{1}{\Pi^2}$ et en $\frac{1}{\Pi}$. Nous aurons ainsi *deux* conditions aux dérivées partielles, lesquelles porteront

toutes deux, comme nous venons de le voir, et comme on le vérifie sans peine directement, sur la distribution des valeurs de Z le long de notre multiplicité $\Pi = 0$. En général, ces deux équations aux dérivées partielles n'auront point de solution commune non identiquement nulle.

Par contre, il existera des solutions de la forme

$$Z \log \Pi + \frac{Z_1}{\Pi}$$

et il est même aisé de les déduire de celles qui ont été obtenues précédemment. Considérons, en effet, la caractéristique dont nous partons comme faisant partie d'une famille de caractéristiques, dont l'équation générale sera

$$\Pi (x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = 0.$$

Pour chaque valeur de λ, nous pourrons construire, par la méthode précédente, la solution

$$Z \log \Pi + z_1.$$

En dérivant l'expression ainsi obtenue par rapport à λ, nous aurons une nouvelle solution de l'équation, laquelle s'écrira

$$\frac{Z}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \log \Pi + \frac{\partial z_1}{\partial \lambda}.$$

Cette solution aura donc bien la forme demandée si l'on n'a pas $\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0$.

Par exemple, en dérivant par rapport à x_0 ou à y_0 les solutions (93) du n° 311, on obtiendra, pour l'équation (92), des solutions de la forme

$$\frac{P}{r^2} + Q \log r + z_1,$$

P et Q étant des fonctions régulières, avec $P(x_0, y_0) = 0$) lesquelles ont été également considérées par M. Picard [1].

317. — Les résultats précédents se généralisent d'eux-mêmes au cas d'équations d'un ordre quelconque.

Par contre, ils ne subsistent plus si la caractéristique considérée est double (n° 281), c'est-à-dire satisfait aux conditions

$$\frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

[1] C. R. Ac. des Sc., 1891.

Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi, et aussi (ce que l'on peut évidemment faire sans diminuer la généralité) que toutes les multiplicités $\Pi = \text{const.}$ soient caractéristiques, de sorte que la quantité désignée plus haut par $\mathcal{A}$ sera identiquement nulle. Alors, une fois le terme en F'' annulé, le terme en F' ne pourra disparaître que pour $Z = 0$, à moins que l'on n'ait pour $\Pi = 0$,

$$M = 0.$$

Si, par exemple, on a pris Π comme variable x_n, on devra avoir, dans l'équation (**63**)

$$\mathrm{a}_n = 0.$$

Par contre, si cette condition est vérifiée il est, en général, possible de former des intégrales présentant la singularité indiquée. Ainsi, pour l'équation (à deux variables indépendantes)

$$\Delta\Delta z + a\frac{\partial}{\partial x}(\Delta z) + b\frac{\partial}{\partial y}(\Delta z) + c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2d\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + e\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2f\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+ 2g\frac{\partial z}{\partial y} + hz = 0$$

qui satisfait à la condition précédente, on démontrerait aisément, par ce procédé, l'existence de solutions de la forme

$$z = r^2 \log r . Z + z_1$$

lesquelles joueraient, pour cette équation, le même rôle que les solutions (**93**) pour l'équation (**92**).

348. — On étend aisément les considérations précédentes aux systèmes d'équations. Soit, par exemple, le système linéaire

$$(94)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum a_{ik}p_{ik} + \sum b_{ik}q_{ik} + \sum c_{ik}r_{ik} + \sum \mathrm{a}_i p_i + \sum \mathrm{b}_i q_i + \sum \mathrm{c}_i r_i\\ &\qquad + g\xi + h\eta + l\zeta = 0,\\ &\sum a'_{ik}p_{ik} + \sum b'_{ik}q_{ik} + \sum c'_{ik}r_{ik} + \sum \mathrm{a}'_i p_i + \sum \mathrm{b}'_i q_i + \sum \mathrm{c}'_i r\\ &\qquad + g'\xi + h'\eta + l'\zeta = 0,\\ &\sum a''_{ik}p_{ik} + \sum b''_{ik}q_{ik} + \sum c''_{ik}r_{ik} + \sum \mathrm{a}''_i p_i + \sum \mathrm{b}''_i q_i + \sum \mathrm{c}''_i r_i\\ &\qquad + g''\xi + h''\eta + l''\zeta = 0,\end{aligned}\right.$$

où, comme au n° **291**, ξ, η, ζ sont les inconnues ; les p, les q et les r, leurs dérivées premières et secondes.

Cherchons une solution, singulière sur la multiplicité $H = 0$ dans laquelle les parties principales des inconnues soient respectivement

$$\xi = \Xi F(H), \qquad \eta = HF(H), \qquad \zeta = ZF(H).$$

La fonction F étant toujours supposée vérifier les mêmes hypothèses qu'au n° **312**, les termes en F' devront disparaître et l'on aura, pour $H = 0$,

$$(95)\qquad \begin{cases} \Xi A + HB + ZC = 0, \\ \Xi A' + HB' + ZC' = 0, \\ \Xi A'' + HB'' + ZC'' = 0, \end{cases}$$

où A est l'expression $\sum a_{ik}\,\pi_i\,\pi_k$ et B, C,... les expressions analogues formées comme au n° **291**.

Le déterminant de ces équations devra, par conséquent, être nul [1] de sorte que *la multiplicité singulière devra être encore une caractéristique.*

Si nous nous plaçons dans l'hypothèse du n° **292** où les mineurs du déterminant en question ne sont pas tous nuls et que nous désignions, comme précédemment, ces mineurs par les notations $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ les équations (**95**) donneront (pour $H = 0$)

$$(96)\qquad \Xi = \alpha\rho, \qquad H = \beta\rho, \qquad Z = \gamma\rho$$

ρ étant une indéterminée : moyennant quoi les premiers membres de ces équations seront nuls avec H et, par conséquent de la forme

$$KH\rho, \quad K'H\rho, \quad K''H\rho$$

K, K', K'' étant des fonctions régulières connues.

Soit encore $F(H) = \log H$, de manière que l'on ait $\frac{F''}{F'} = -\frac{1}{H}$. La disparition des termes singuliers en F' dans l'équation que l'on obtient en multipliant les premières respectivement par $\alpha, \alpha', \alpha''$ (afin d'éliminer F'') fournit une équation entièrement analogue à l'équation précédemment écrite (**33**) au remplacement près des quantités $p_{\ldots}, q_{\ldots}, r_{\ldots}$ par Ξ, H, Z. Dès lors, si nous substituons à ces dernières quantités leurs valeurs (**96**), il est clair que nous aurons une équation en ρ semblable à l'équation obtenue au n° **293** et à laquelle on pourra appliquer toutes les conclusions précédemment établies relativement à cette dernière. Ainsi, cette équation définira la distribution des valeurs de ρ sur la multiplicité singulière et aura pour caractéristiques les bicaractéristiques du système (**94**).

On déterminera ainsi les valeurs de Ξ, H, Z sur $H = 0$.

---

[1] Il n'y a pas à se préoccuper du cas où Ξ, H, Z seraient nuls avec H, pour la même raison qu'au n° **342**. Voir la note de la page 333.

349. — Pour voir si l'on pourra obtenir dans ces conditions une solution du problème, nous supposerons effectuée la transformation que nous avons indiquée aux n° **322-323.** Autrement dit, notre caractéristique ne sera autre que $x_n = 0$; de plus, l'une de nos trois équations ne contiendra plus les dérivées secondes par rapport à x_n ; les deux autres contiendront ces dérivées, l'une dans le seul terme p_{nn}, l'autre dans le seul terme q_{nn} (1).

Si nous groupons nos différents termes d'après leurs ordres de différenciation par rapport à x_n seul, nous pourrons écrire ces équations sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2_n} + \varphi_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right) + \psi_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_n}\right) + \chi_1\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) + \varphi_2(\xi) + \psi_2(\eta) + \chi_2(\zeta) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2_n} + \varphi'_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right) + \psi'_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_n}\right) + \chi'_1\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) + \varphi'_2(\xi) + \psi'_2(\eta) + \chi'_2(\zeta) = 0,$$

$$\varphi''_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right) + \psi''_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_n}\right) + \chi''_1\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) + \varphi''_2(\xi) + \psi''_2(\eta) + \chi''_2(\zeta) = 0,$$

où $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1, \varphi''_1, \psi''_1, \chi''_1$ désignent des polynômes différentiels linéaires du premier ordre, portant chacun une fonction, dans lesquels n'interviennent que des différenciations par rapport aux variables autres que x_n ; $\varphi_2, \psi_2, \ldots, \psi''_2, \chi''_2$, des polynômes différentiels du second ordre également dépourvus de différenciations par rapport à x_n.

C'est dans les équations ainsi écrites que nous devrons substituer les valeurs

$$\text{(97)} \qquad \xi = \Xi \log x_n + \xi_1, \qquad \eta = \mathrm{H} \log x_n + \eta_1, \qquad \zeta = \mathrm{Z} \log x_n + \zeta_1$$

des inconnues. Le facteur $\log x_n$ devant être traité comme une constante dans toute différenciation par rapport à une variable autre que x_n, on aura évidemment comme résultat

$$\text{(98)} \quad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\Xi}{x^2_n} + \frac{1}{x_n}\left[2\frac{\partial \Xi}{\partial x_n} + \varphi_1(\Xi) + \psi_1(\mathrm{H}) + \chi_1(\mathrm{Z})\right] + \ldots = 0, \\ &-\frac{\mathrm{H}}{x^2_n} + \frac{1}{x_n}\left[2\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_n} + \varphi'_1(\Xi) + \psi'_1(\mathrm{H}) + \chi'_1(\mathrm{Z})\right] + \ldots = 0, \\ &\qquad\qquad \frac{1}{x^n}\left[\varphi''_1(\Xi) + \psi''_1(\mathrm{H}) + \chi''_1(\mathrm{Z})\right] \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

---

(1) Plus exactement, pour obtenir ce résultat on devra s'arranger pour que toutes les multiplicités $x_n = \text{const.}$ soient des caractéristiques et opérer un changement d'inconnues défini, non par les formules (**52**), mais par les formules (**53**), les fonctions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ étant égales, *pour tout système de valeurs de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, aux coefficients $a_{nn}, b_{nn}, c_{nn}, a'_{nn}, b'_{nn}, c'_{nn}$.

où nous n'avons écrit que les termes en $\frac{1}{x_n^2}$ et en $\frac{1}{x_n}$. La disparition des premiers dans les deux premières équations montre que Ξ et H doivent s'annuler avec x_n : c'est ce qui correspond aux formules (96). Dans ces conditions, la disparition des termes en $\frac{1}{x_n}$ dans la troisième équation exige que l'on ait pour $\Pi = 0$,

$$\chi'_1(Z) = 0.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles trouvée tout à l'heure, qui détermine la distribution des valeurs de Z sur la multiplicité $x_n = 0$. Si elle est vérifiée, notre troisième équation (à laquelle se réduit ici la combinaison linéaire formée au n° précédent) ne contient plus d'autres termes singuliers que les termes logarithmiques.

Écrivons qu'il en est de même des deux équations restantes. Ξ et H étant nuls initialement, on a

(99) $$\Xi = x_n \Xi_1, \qquad H = x_n H_1$$

où sont Ξ_1 et H_1 de nouvelles fonctions régulières. Il vient alors, en égalant à zéro les termes en $\frac{1}{x_n}$ (lesquels, moyennant les relations (99) sont fournis tant par les termes en $\frac{1}{x_n}$ que par ceux en $\frac{1}{x_n^2}$ des deux premières équations (98)),

$$\Xi_1 + \chi_1(Z) = 0,$$
$$H_1 + \chi'_1(Z) = 0.$$

Z étant connu pour $x_n = 0$, *les deux relations précédentes font connaître les valeurs initiales de* Ξ_1 *et de* H_1, c'est-à-dire de $\frac{\partial \Xi}{\partial x_n}$ et de $\frac{\partial H}{\partial x_n}$.

Si nous nous rappelons que Ξ, H, Z doivent former eux-mêmes une solution du système donné afin de faire disparaître les termes logarithmiques, nous voyons que nous sommes conduits à déterminer une telle solution en nous donnant les valeurs de nos trois inconnues et des dérivées premières de deux d'entre elles sur la caractéristique $x_n = 0$. Or, nous avons vu au n° 323 qu'à ces données nous pouvions adjoindre les valeurs de Z sur une multiplicité sécante à la première.

Donc il existe une infinité de solutions de la forme (97) dépendant d'une fonction arbitraire de $n - 1$ variables et d'une seconde fonction arbitraire de $n - 2$ variables puisque Z peut être choisi arbitrairement en

ous les point d'une multiplicité $n - 2$ fois étendue située sur notre caractéristique et coupant chaque bicaractéristique en un point.

350. — Nous serons conduits aux ondes qui interviennent dans la théorie des mouvements périodiques si nous donnons à la fonction F la forme

$$F(\Pi) = \sin \mu\Pi$$

μ étant un paramètre arbitraire.

La fonction F ainsi choisie est holomorphe, quel que soit μ et constamment comprise entre $+1$ et -1. Elle ne rentre donc pas, à proprement parler, dans la catégorie qui vient d'être envisagée. Cependant — et c'est là une notion qui acquiert une grande importance dans beaucoup d'applications physiques de l'Analyse — tout en étant théoriquement toujours régulière, elle doit être considérée comme *pratiquement singulière* lorsque μ a de grandes valeurs : elle présente, en effet, un certain nombre de propriétés qui la rapprochent des fonctions pourvues de singularités. Elle est toujours continue et n'offre jamais de variations brusques, au sens absolu du mot ; mais elle passe cependant de la valeur $+1$ à la valeur -1 lorsque sa variable indépendante Π s'accroît de la petite quantité $\frac{\pi}{\mu}$. Elle a une dérivée, laquelle n'est jamais infinie ; mais les valeurs de cette dérivée sont très grandes par rapport à celles de la fonction, savoir de l'ordre de μ ; celles de la dérivée seconde sont de même très grandes comme μ^2 ; etc.

D'après cela, si (en nous bornant au cas d'une seule inconnue) nous supposons que l'équation (**63**) a une solution de la forme [1]

$$z = Z \sin \mu\Pi + z_1 \tag{100}$$

et si μ est très grand, les dérivées de Π, de Z et de z_1 (ainsi que ces quantités elles-mêmes) n'étant pas très grandes, il faudra que dans le premier membre de l'équation (**86**), les termes en F'', qui sont de l'ordre de μ^2, et les termes en F', qui sont de l'ordre de μ, s'annulent séparément. La première de ces conditions donne

$$A = 0 \tag{12}$$

et cela, cette fois, pour toute valeur de Π, de sorte que *les multiplicités* $\Pi =$ *const. doivent être des caractéristiques*.

---

(1) Rien d'essentiel ne serait modifié si nous remplacions le terme unique $Z \sin \mu\Pi$ par la somme $Z_1 \sin \mu\Pi + Z_2 \cos \mu\Pi$.

Les termes en F′ donnent la condition (**89**) avec $\mathcal{A} = 0$, par conséquent en introduisant la variable bicaractéristique s définie par les équations (14) (n° **283**).

$$\frac{dZ}{ds} + MZ = 0. \tag{101}$$

Inversement, supposons les fonctions H et Z déterminées, la première par l'équation (**12′**), la seconde par l'équation (**101**). Alors le résultat de substitution, dans l'équation donnée, du produit Z sin μH se réduira à Q sin μH, en posant

$$Q = \mathcal{F}(Z).$$

Nous aurons donc à déterminer z_1 par l'équation

$$\mathcal{F}(z_1) = -Q \sin \mu H. \tag{102}$$

Or, pour les diverses équations aux dérivées partielles du second ordre (à caractéristiques réelles) que l'on a pu intégrer (comparer n° **339**), on constate, pour l'équation à second membre

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}$$

(où $\mathcal{F}$ est une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$), l'existence de solutions représentées par des sommes d'intégrales n^{uples} ou $n - 1^{\text{uples}}$ de la forme

$$\int \int \cdots \int \mathcal{F}(x'_1, \ldots, x'_n)\, G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)\, d\tau \tag{103}$$

où G est calculé *a priori*, indépendamment de la fonction $\mathcal{F}$ et où $d\tau$ est un élément de multiplicité n fois ou $n - 1$ fois étendue, décrite par le point $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

Pour obtenir une solution de l'équation (**102**), nous devrons remplacer $\mathcal{F}$ par $-Q \sin \mu H$.

Supposons que les fonctions Q et G satisfassent à des conditions analogues à celles de Dirichlet, je veux dire que leurs variations totales [1], sur une ligne quelconque finie, ne soient pas très grandes par rapport à ces fonctions elles-mêmes. Alors la théorie des séries trigonométriques [2] nous apprend

[1] Jordan, *Cours d'Analyse*, 2e édition, tome I, n° **67**, pages 54 et suiv.

[2] Jordan, *Ibid.* tome II, ch. IV ; Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, tome I, 2e partie, ch. IX.

qu'une intégrale de la forme (**103**), portant sur la fonction QG sin μH, *est très petite par rapport aux valeurs de* Q *et de l'ordre de* $\frac{Q}{\mu}$.

Supposons enfin que $Q = \mathcal{F}(Z)$ soit du même ordre de grandeur que Z lui-même. On voit alors que, des deux termes de l'expression (**100**), le second est très petit par rapport au premier. La solution se réduit donc sensiblement dans ces conditions, au produit Z sin μH.

Cette quantité éprouve, d'après sa forme même, des oscillations périodiques d'autant plus rapides que μ est plus grand, et les points de phases correspondantes sont situés sur des surfaces H = const., c'est-à-dire sur des caractéristiques.

351. — Revenons maintenant à la détermination de Z. Une fois H choisi, Z est assujetti à l'équation différentielle (**101**).

Or celle-ci ne fait connaître que les rapports mutuels des valeurs de Z aux différents points d'une même bicaractéristique. Elle n'établit aucune relation entre les valeurs prises par cette fonction sur des bicaractéristiques différentes.

Donnons-nous arbitrairement, par exemple, une *région* de l'*espace à n* dimensions, et considérons l'ensemble des bicaractéristiques qui traversent cette région : ce qu'on pourrait appeler un *pinceau* de bicaractéristiques. *Rien ne nous empêchera de supposer Z différent de zéro sur les bicaractéristiques du pinceau et nul partout ailleurs.*

Les bicaractéristiques sont d'ailleurs bien, d'après ce qui précède, les seules lignes qui possèdent cette propriété.

Or, dans celle-ci, nous reconnaissons bien le caractère essentiel par lequel les rayons interviennent physiquement. Elle correspond d'ailleurs d'autant mieux à une propriété de la solution (**100**) que μ est plus grand et, par conséquent, z_1 plus petit : et c'est bien, en effet, pour les oscillations extrêmement rapides, comme les vibrations lumineuses, que la propagation par rayons est la plus nette.

Il faut observer, toutefois, que, dans les régions où Z varierait rapidement les conclusions seront modifiées, z_1 cessant d'être négligeable (*diffraction*).

NOTE I

SUR LE PROBLÈME DE CAUCHY ET LES CARACTÉRISTIQUES

Lorsque nous avons établi (au chap. IV) que si deux surfaces intégrales d'une même équation de Monge-Ampère étaient tangentes tout le long d'une ligne, celle-ci ne pouvait être qu'une caractéristique, notre démonstration est restée incomplète sur un point : nous avons dû, en effet, laisser de côté le cas où le contact est d'ordre infini. Il y a donc lieu de se demander si, même en tenant compte des solutions non analytiques, le problème de Cauchy est parfaitement déterminé toutes les fois que la série des valeurs données n'est pas caractéristique. Lorsqu'il s'agit d'une équation linéaire à coefficients analytiques et holomorphes, la solution a été obtenue d'une manière ultérieurement générale par M. Holmgren ([1]), et cela, non seulement pour une équation du second ordre, mais pour un système linéaire d'un nombre quelconque d'équations.

Un tel système peut, comme on sait, se ramener toujours à une forme dans laquelle toutes les équations sont du premier ordre. De plus, si les multiplicités $x =$ const. ne sont pas des caractéristiques, ces équations sont résolubles par rapport aux dérivées relatives à x, de sorte qu'elles ont la forme

$$(1) \qquad \mathcal{F}_i(z) = \frac{\partial z_i}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(x, y) \frac{\partial z_k}{\partial y} - \sum_{k=1}^{n} B_{ik}(x, y) z_k = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

les quantités A_{ik}, B_{ik} étant des fonctions analytiques et holomorphes de x

---

([1]) Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akad. Förhandl., 9 janvier 1901, p. 91-103.

et de y. Si la ligne donnée L (sur laquelle z_1, z_2, ... z_n doivent s'annuler) n'est pas tangente à une caractéristique au point O aux environs duquel nous nous proposons d'étudier le système des fonctions z, on peut admettre que l'axe des y est la tangente en ce point, les équations conservant la forme précédente.

On peut, de plus toujours exclure, par une transformation évidente, le cas où il y aurait inflexion en O et admettre par conséquent, que notre ligne tourne sa convexité d'un côté déterminé de l'axe des y. Le choix de ce côté est même à notre disposition. Supposons, pour fixer les idées, que nous avons choisi celui des x positifs, ou côté droit.

Le système adjoint de (1) est

$$\mathcal{G}_i(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_k \frac{\partial}{\partial y}(A_{ki} u_k) - \sum_k B_{ki} u_k = 0$$

ou

$$\mathcal{G}_i(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_k A_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial y} - \sum_k \beta_{ki} u_k = 0. \tag{2}$$

$$\beta_{ki} = -B_{ki} - \frac{\partial A_{ki}}{\partial y}. \tag{3}$$

Il donne lieu, avec le système donné, à l'identité

$$\left\{ \begin{aligned} &\int\int \left\{ \sum_i \left[u_i \mathcal{F}_i(z) + z_i \mathcal{G}_i(u) \right] \right\} dx\, dy \\ &= \int \left(\sum_i z_i u_i dy - \sum_{ik} A_{ik} u_i z_k dx \right) \end{aligned} \right. \tag{4}$$

où l'intégrale double est étendue à une aire quelconque du plan des xy et l'intégrale simple au contour de cette aire.

Les fonctions β seront, comme les A et les B, analytiques et holomorphes, par conséquent développables en séries de Taylor ordonnées suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, en désignant par x_0, y_0 les coordonnées d'un point quelconque voisin de O. De plus, les rayons de convergence associés (1) de ces développements ne descendront pas au-dessous d'une certaine limite fixe lorsque le point, (x_0, y_0) variera dans le voisinage de O. Comme

(1) Voir BOREL. — *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 80.

les fonctions correspondantes restent finies, l'un quelconque des développements en question admettra une série majorante de la forme

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r'}\right)} \tag{5}$$

M, r, r' étant indépendants de x_0, y_0.

Dans ces conditions si, sur la droite $x = x_0$, nous nous donnons des valeurs des u, soit $u_i = f_i(y)$, ces valeurs étant analytiques et holomorphes et leurs développements suivant les puissances de $y - y_0$ admettant la série majorante commune

$$\frac{P}{1 - \frac{y - y_0}{R}}, \tag{6}$$

(P, R constants) les raisonnements classiques relatifs aux équations aux dérivées partielles nous apprennent [1] l'existence d'une solution holomorphe du système (2) prenant sur la droite $x = x_0$ les valeurs données. De plus, les développements des fonctions u ainsi obtenues convergent pour

$$(x - x_0) < \rho, \qquad (y - y_0) < \rho'$$

ρ, ρ' dépendant de M, r, r', R, mais non de P : on peut, en effet, donner à cette dernière quantité une valeur arbitraire en multipliant les valeurs $f_i(y)$ par un même facteur, lequel se retrouvera dans les valeurs des inconnues et ne modifiera pas les rayons de convergence de leurs développements : ρ, ρ' sont, par exemple, supérieurs aux valeurs qu'ils prendraient si l'on remplaçait tous les A_{ik}, β_{ik} par la fonction (5) et tous les f_i par la fonction

$$\frac{1}{1 - \frac{y - y_0}{R}}$$

(cas où ces valeurs pourraient être aisément écrites, les u s'obtenant alors par intégration directe).

Choisissons arbitrairement R, ce qui nous permettra de calculer ρ, ρ' puisque M, r, r', sont connus. Donnons enfin à x_0 une valeur inférieure en valeur absolue à ρ et telle que la droite $x = x_0$ intercepte sur notre ligne

[1] JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, chap. III — GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations dérivées partielles du premier ordre*, p. 2-8

un arc PP′ (*fig.* 24) entièrement situé dans le domaine où les considérations précédentes sont valables.

Supposons maintenant que le système (1) admette une solution telle que tous les z soient nuls sur l'arc, cette solution étant définie dans le voisinage de cet arc et en particulier dans toute la région comprise entre cet arc et sa corde. Nous appliquerons la formule (4) au contour de l'aire ainsi définie en prenant pour les z les fonctions dont nous venons de supposer l'existence.

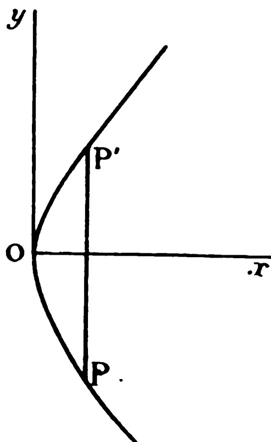


Fig. 24

Quant aux u, ils seront définis de la façon suivante : soit $F_i(y)$ la série des valeurs prises par z_i le long du segment de droite. Nous pourrons trouver (pour chaque valeur de i) un polynome $f_i(y)$ qui ait, avec F_i, une différence $\varphi_i(y)$ partout inférieure en valeur absolue à un nombre ε aussi petit que nous le voulons.

Nous prendrons pour les u_i la solution du système adjoint telle que u_i se réduise sur la droite à $f_i(y)$. Les polynomes f_i pouvant évidemment toujours être regardés comme admettant des majorantes de la forme (6) les u_i existeront et seront holomorphes dans toute notre aire d'intégration.

Dans le second membre de (4), l'intégrale relative à l'arc PP′ sera nulle, puisque tous les z s'annulent le long de cet arc. Sur la corde de PP′, dx étant nul, l'élément d'intégration se réduit à

$$\sum u_i z_i dy = dy \sum F_i f_i = dy \left[\sum F_i^2 + \sum F_i \varphi_i \right].$$

Soient I l'intégrale $\int \left[\sum F_i(y)^2 \right] dy$; H, le maximum du module des F_i ; l, la longueur PP′ : il est clair que l'intégrale considérée différera de I d'une quantité inférieure à $n\varepsilon Hl$. Elle ne pourra donc être nulle si l'on a

$$\varepsilon < \frac{I}{nHl}.$$

Comme ε est arbitrairement petit, on pourra toujours supposer cette inégalité vérifiée, et la formule conduira par conséquent à une contradiction

dès que l'on n'aura pas $I = 0$, c'est-à-dire dès que les F ne seront pas tous identiquement nuls. Il faudra donc bien que l'on ait partout du moins à droite de L

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0,$$

car l'abscisse x_0 est arbitraire sous la condition $x_0 < \rho$.

Pour établir la même conclusion pour les points situés à gauche de L, il suffira de modifier, par un changement de variables, le sens de la convexité de cette ligne.

Le raisonnement précédent se généralise de lui-même au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes. S'il y en a trois, par exemple, les données de Cauchy seront relatives à une surface à laquelle il suffira de donner (par un changement de variables) des courbures de même signe et différentes de 0.

On peut, d'autre part, ramener le cas d'une équation quelconque à celui d'une équation linéaire au moyen du lemme suivant :

Soit $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *une fonction qui admet dans un certain domaine des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre p. Si* $y_1, y_2, \dots y_m$ *désignent une nouvelle série de variables en même nombre que les premières, la différence*

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) - F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

peut se mettre sous la forme

$$(y_1 - x_1)\varphi_1 + (y_2 - x_2)\varphi_2 + \dots + (y_m - x_m)\varphi_m$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ *désignent des fonctions de* $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$ *continues ainsi par leurs dérivées jusqu'à l'ordre* $p - 1$.

Pour démontrer cette proposition, on commencera par supposer $m = 1$: on verra sans difficulté que, pour F continu ainsi que ses p premières dérivées, la fonction

$$\frac{F(y_1) - F(x_1)}{y_1 - x_1}$$

est continue ainsi que ses dérivées partielles, par rapport à x_1 et à y_1, jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Pour passer de là au cas général, il suffira d'appliquer la conclusion ainsi obtenue à chacun des termes de la somme.

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{F}(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) - \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)\right]\\ &+\left[\mathrm{F}(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_m) - \mathrm{F}(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)\right] + \ldots\\ &+\left[\mathrm{F}(y_1, y_2, \ldots, y_m) - \mathrm{F}(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x_m)\right].\end{aligned}$$

Si d'ailleurs F est analytique, il sera de même de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$.

Pour $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_m = y_m$, ces fonctions ont évidemment les valeurs

$$(7)\qquad \varphi_i = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Cela posé, soient

$$(8)\qquad \mathcal{F}(z) = \mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre définissant z comme fonction de x et de y ; z et $z' = z + u$ deux intégrales de cette équation, lesquelles coïncident ainsi que leurs dérivées tout le long d'une certaine ligne L. On aura

$$\mathcal{F}(z + u) = \mathcal{F}(z) = 0.$$

Mais d'après le lemme précédent, la relation

$$\mathrm{F}\left(x, y, z + u, \quad p + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

pourra se mettre sous la forme

$$(9)\qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

$a, b, \ldots, f$ étant des fonctions continues et dérivables de x, y de z, u et de leurs dérivées : c'est-à-dire (si z et u sont eux-mêmes supposés dérivables jusqu'à un certain ordre) des fonctions continues et dérivables de x et de y.

Tout revient donc à savoir si cette équation linéaire en u peut admettre une intégrale nulle ainsi que ses dérivées premières et secondes tout le long d'une ligne déterminée L sans être identiquement nulle — ou, du moins, sans être nulle dans toute une région avoisinant L.

Remarquons qu'en tout point où u est nul ainsi que ses dérivées premières et secondes, on a, d'après les relations (7),

$$(10) \qquad a = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad 2b = \frac{\partial F}{\partial s}, \qquad c = \frac{\partial F}{\partial t},$$

de sorte qu'en un tel point, les caractéristiques de l'équation (9) sont tangentes à celles de la proposée.

La question serait dès lors résolue, par la démonstration de M. Holmgren, si l'équation (9) était à coefficients analytiques. Mais nous ne devons pas admettre qu'il en soit ainsi, même si F est elle-même analytique. Nous devons, en effet, comme nous l'avons dit en commençant, supposer que les intégrales z et z' ne possèdent pas cette propriété, laquelle ne saurait dès lors appartenir aux coefficients a, b, c, ...

Il serait donc nécessaire d'étendre le raisonnement de M. Holmgren aux équations linéaires non analytiques. Cette extension n'est faite jusqu'ici que dans un cas : celui où les caractéristiques de l'équation (9) — et, par conséquent, celles de l'équation donnée — sont réelles et distinctes. Dans ce cas, en effet, les raisonnements du n° **174** s'appliquent, la fonction de Riemann pouvant toujours être formée par la méthode des approximations successives [1]. Notre conclusion est donc alors démontrée.

---

[1] PICARD, in DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, tome IV.

NOTE II

SUR LES GLISSEMENTS DANS LES FLUIDES

Nous avons vu, au chap. V, que, outre les ondes (lesquelles n'existent que dans les fluides compressibles) les fluides quelconques, compressibles ou non, peuvent présenter des discontinuités stationnaires. On sait d'ailleurs que celles-ci peuvent être *absolues*, c'est-à-dire que deux portions du fluide peuvent glisser l'une sur l'autre à la façon de deux corps différents.

Depuis Helmholtz, qui, le premier, a attiré l'attention sur cette catégorie de mouvements (1), ceux-ci jouent un rôle important dans plusieurs théories hydrodynamiques ; leur existence est invoquée pour expliquer diverses circonstances paradoxales, tels que l'écoulement des liquides en présence de parois anguleuses, ou encore le résultat connu sous le nom de *paradoxe de d'Alembert* (absence de résistance opposée par un liquide à un solide symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à la direction du mouvement).

De telles explications souffrent toutefois une objection commune à laquelle nous avons déjà fait allusion dans le texte (ch. V). Les glissements dont nous venons de parler sont, en effet, possibles, en ce sens que rien (en l'absence de viscosité) ne s'oppose à leur *persistance*, une fois qu'ils se sont produits entre deux régions quelconques du fluide ; mais nous allons voir que leur *naissance* est impossible, du moins dans les conditions où se place l'Hydrodynamique rationnelle.

Si même, sur une surface de glissement, la vitesse de glissement est

(1) *Monatsber der Berl. Ac. der Wissensch.*, 23 avril 1868.

nulle en un point déterminé à l'instant t_0, elle restera nulle entre les mêmes molécules à tout instant ultérieur.

Il est toutefois essentiel de tenir compte de la restriction que nous avons apportée à notre énoncé il y a un instant. On rencontre, en effet, dans l'étude des fluides naturels, des cas qui échappent au raisonnement que nous allons présenter, comme à tous ceux qui reposent sur les équations classiques de l'hydrodynamique telles que nous les avons écrites dans le texte (ch. III et V) et où, par conséquent, rien n'exclut plus la production de discontinuités absolues au cours du mouvement.

Tels sont ceux dans lesquels, la pression s'annulant, des cavités se creusent momentanément dans la masse fluide considérée. Ces cavités se referment en général par des remous dans lesquels les molécules appartenant à des régions différentes se mélangent entre elles, de sorte qu'il devient impossible d'admettre en aucun point l'hypothèse de continuité du n° **15**.

Ce que nous allons prouver est donc simplement qu'une telle singularité (ou toute autre analogue, pourvu que les hypothèses qui servent de base à l'hydrodynamique rationnelle cessent d'être vérifiées [1]) sont nécessaires pour qu'un glissement se produise dans une période quelconque du mouvement, s'il n'en existait pas avant cette période.

La démonstration repose sur ce fait, constaté au n° **214**, que (moyennant les hypothèses fondamentales en question) à chaque instant d'un glissement relatif, le saut d'accélération est normal à la surface S, le long de laquelle la discontinuité a lieu.

Proposons-nous de former les équations différentielles qui expriment cette condition.

Reprenant les mêmes notations qu'au n° **219**, nous désignerons par ξ, η des coordonnées curvilignes prises sur S, considérée dans son état initial S_0. Les coordonnées cartésiennes x, y, z d'une molécule de S *appartenant à la région* 1 seront des fonctions de ξ, η et du temps t :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, t), \\ y = y(\xi, \eta, t), \\ z = z(\xi, \eta, t). \end{cases}$$

[1] Les équations générales de l'Hydrodynamique sont également modifiées dans le cas du frottement ; mais celui-ci ne paraît pas pouvoir être invoqué pour expliquer la naissance des glissements, car il a pour effet, au contraire, de détruire ceux qui pourraient exister initialement.

Il en sera de même des coordonnées x' y' z' d'une molécule de S appartenant à la région 2 ; mais les expressions seront différentes dans les deux cas. Puisqu'il y a glissement le long de S, la molécule de la région 1 qui avait, dans l'état initial, les coordonnées curvilignes ξ, η coïncidera, à l'instant t, celle de la région 2 qui avait, dans l'état initial, les coordonnées ξ', η' (en général différentes des premières). Si ξ' et η' sont donnés, ξ et η seront des fonctions de t, qu'il suffira de substituer dans les équations (1) pour avoir le mouvement de la molécule (x', y', z').

Ce sont ces fonctions que nous avons à étudier.

L'accélération de la molécule (x, y, z) s'obtiendra en différentiant deux fois les formules (1) par rapport à t, sans faire varier ξ et η ; elle aura pour composantes

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

L'accélération de la molécule (x', y', z') s'obtiendra en substituant, au contraire, à ξ, η, leurs valeurs en fonction de t : elle aura pour composantes

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial t}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\,\partial t}\frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\,\partial t}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\,\partial t}\frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial t}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial t}\frac{d\eta}{dt}.$$

Il suffira de faire passer dans les premiers membres les termes $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ pour obtenir, aux seconds membres, les composantes du saut d'accélération. Nous écrirons que le segment ainsi obtenu est normal à S en écrivant qu'il est perpendiculaire aux deux directions

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Ceci donne les deux relations

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial t}\right)+2\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial t}\right)=0,\\
&\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial t}\right)+2\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial t}\right)=0
\end{aligned}
\right.
$$

où les signes Σ signifient qu'il faut remplacer, dans les dérivées partielles, x par y, puis par z et ajouter les trois expressions ainsi obtenues.

Nous voyons s'introduire ici les coefficients

$$
(3)\qquad E=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2,\quad F=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right),\quad G=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2
$$

de l'élément linéaire

$$
E\,d\xi^2+2F\,d\xi\,d\eta+G\,d\eta^2
$$

de la surface S à l'instant considéré : ce sont eux qui figurent comme coefficients des dérivées secondes de ξ et η, dans les équations précédentes.

D'autre part, leurs dérivées partielles permettent d'exprimer les coefficients de $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$, $2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt}$, $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$, savoir

$$
\sum\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\xi},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\eta},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}=\frac{\partial F}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\xi},
$$

$$
\sum\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}=\frac{\partial F}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\eta},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\xi},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\eta}.
$$

Elles permettent également d'exprimer deux des coefficients de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$: celui de $\frac{d\xi}{dt}$ dans la première équation :

$$
2\sum\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial t}=\frac{\partial E}{\partial t}
$$

et celui de $\frac{d\eta_1}{dt}$ dans la seconde

$$2\sum \frac{\partial x}{\partial \eta_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta_1 \partial t} = \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Mais il n'en est pas de même des deux coefficients restants

$$(4) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta_1 \partial t}, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \eta_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t}.$$

Leur somme seule peut se calculer à l'aide des coefficients (3) : elle est égale à $\frac{\partial F}{\partial t}$.

Il était d'ailleurs évident *a priori* que, dans les équations (2), devait s'introduire un élément distinct de la forme de la surface S. En effet, le mouvement d'une molécule (x', y', z') peut être considéré comme résultant du mouvement de la surface S prise dans la région 1 (c'est-à-dire celui des molécules (x, y, z)) et du mouvement de (x', y', z') par rapport à (x, y, z) : le premier de ces mouvements pouvant être regardé comme un mouvement d'entrainement et le second comme un mouvement relatif. Or on sait que, dans la théorie des mouvements relatifs, les accélérations ne se composent pas linéairement comme les vitesses : si, par exemple, le mouvement d'entrainement était celui d'un système invariable, on aurait à tenir compte de l'accélération complémentaire de Coriolis, laquelle dépend de la rotation instantanée de ce système. On doit donc s'attendre à l'intervention d'une rotation de cette espèce dans la question actuelle, et même le théorème de Coriolis auquel nous venons de faire allusion nous indique la partie de cette rotation qui jouera vraisemblablement un rôle. Si, en effet, la rotation en question était tangente à S, comme il en est de même de la vitesse relative, le théorème de Coriolis (en le supposant applicable) donnerait une accélération complémentaire normale. Comme l'évanouissement des composantes *tangentielles* du saut d'accélération nous intéresse seul, nous ne devons avoir à utiliser que la composante normale de la rotation.

Il est aisé de voir que les choses se passent effectivement ainsi : il suffit de décomposer le mouvement de S en une déformation pure et une rotation, comme nous l'avons fait aux n^{os} **51** et **62**. Il est vrai qu'au lieu d'une déformation de l'espace, nous n'avons ici que la déformation d'une surface : mais, pour ramener ce dernier cas au premier, il suffit d'imaginer que la surface S entraîne avec elles ses normales, chacune de celles-ci se déplaçant comme une droite invariable. On pourra alors écrire, en désignant par le symbole d les différentielles qui correspondent à des déplace-

ments dans l'espace à l'instant considéré ; par u, v, w, les composantes de la vitesse du point (x, y, z) et par φ une forme quadratique en dx, dy, dz, écrire les équations du n° **62** sous la forme

$$du = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial(dx)} + q\,dz - r\,dy,$$

$$dv = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial(dy)} + r\,dx - p\,dz,$$

$$dw = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial(dz)} + p\,dy - q\,dx,$$

$$\left(u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

et, par conséquent, en prenant dx, dy, dz proportionnels successivement à $\frac{\partial x}{\partial\xi}, \frac{\partial y}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\xi}$ et à $\frac{\partial x}{\partial\eta}, \frac{\partial y}{\partial\eta}, \frac{\partial z}{\partial\eta}$, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)} + q\frac{\partial z}{\partial\xi} - r\frac{\partial y}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial\xi} = \frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)} + r\frac{\partial x}{\partial\xi} - p\frac{\partial z}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial w}{\partial\xi} = \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)} + p\frac{\partial y}{\partial\xi} - q\frac{\partial x}{\partial\xi};$$

et les équations analogues où ξ est remplacé par η.

Multiplions maintenant les trois premières de ces équations respectivement par $\frac{\partial x}{\partial\eta}, \frac{\partial y}{\partial\eta}, \frac{\partial z}{\partial\eta}$; les trois dernières par $\frac{\partial x}{\partial\xi}, \frac{\partial y}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\xi}$ et retranchons la somme des trois derniers produits de la somme des trois premiers. Les termes qui dépendent des dérivées de φ s'élimineront et il restera

$$\sum \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial t} - \sum \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\,\partial t} = 2\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\eta} \end{vmatrix} = 2R\sqrt{EG - F^2},$$

en désignant par R la composante normale de la rotation (p, q, r).

Donc enfin, les équations (2) s'écrivent

$$(5)\begin{cases} E\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+F\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\delta E}{\delta\xi}\left(\dfrac{d\xi}{dt}\right)^2+2\dfrac{\delta E}{\delta\eta}\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\eta}{dt}+\left(2\dfrac{\delta F}{\delta\eta}-\dfrac{\delta G}{\delta\xi}\right)\left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad +\dfrac{\delta E}{\delta t}\dfrac{d\xi}{dt}+\left(\dfrac{\delta F}{\delta t}-2R\right)\dfrac{d\eta}{dt}=0, \\ F\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+G\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\dfrac{1}{2}\left[\left(2\dfrac{\delta F}{\delta\xi}-\dfrac{\delta E}{\delta\eta}\right)\left(\dfrac{d\xi}{dt}\right)^2+2\dfrac{\delta G}{\delta\xi}\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\eta}{dt}+\dfrac{\delta G}{\delta\eta}\left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad +\left(\dfrac{\delta F}{\delta t}+2R\right)\dfrac{d\xi}{dt}+\dfrac{\delta G}{\delta t}\dfrac{d\eta}{dt}=0. \end{cases}$$

Lorsque la surface S est fixe ainsi que les molécules de la région 1 situées sur cette surface, les deux équations que nous venons d'obtenir se réduisent à celles qui définissent le mouvement d'un point sur S, en l'absence de force accélératrice ; ce qui était évident *a priori*, puisque ces dernières s'obtiennent en exprimant que l'accélération est normale.

Dans tous les cas, si le mouvement du milieu 1 est donné, celui des molécules x', y', z' est déterminé par les équations (5) lesquelles sont de la même forme que les équations de la dynamique à deux degrés de liberté, en ce sens que les dérivées secondes de ξ et de η sont exprimées par des polynômes du second degré par rapport aux dérivées premières ([1]).

D'autre part, les équations (5) étant toujours résolubles par rapport à ces dérivées secondes (puisque $EG - F^2$ est toujours positif) et admettant la solution $\xi =$ const., $\eta =$ const., il résulte des théorèmes généraux relatifs aux équations différentielles que ξ et η *sont forcément constants si, à un instant déterminé quelconque t_0 leurs dérivées sont nulles, c'est-à-dire si, à cet instant, il n'y a point de saut de vitesse,*

Ceci pourra d'ailleurs avoir lieu en tous les points de la surface S — et alors celle-ci ne sera pas une discontinuité absolue — ; ou seulement en certains points de cette surface, et alors les molécules de la région 1 situées en ces points coïncideront, dans toute la suite du mouvement, avec les molécules correspondantes de la région 2.

([1]) Si l'on substituait à l'une des portions du fluide une paroi solide animée du même mouvement, le mouvement des molécules de la partie fluide ne serait pas changé. Il n'en résulte pas, bien entendu, que les équations (5) soient applicables au mouvement superficiel d'un fluide limité par une paroi quelconque. Il n'en est ainsi que dans le cas où le mouvement de cette paroi est celui qu'elle prendrait d'elle-même si on la supposait fluide, de même nature que le milieu qui la touche et soumise aux pressions de ce milieu.

NOTE III

SUR LES TOURBILLONS PRODUITS PAR LES ONDES DE CHOC

Nous avons établi aux nos **254-255** que la présence de discontinuités du second ordre ne mettait pas en défaut les théorèmes classiques de l'hydrodynamique relatifs à la conservation du potentiel des vitesses ou des tourbillons. Nous allons nous proposer de rechercher l'effet produit à cet égard lorsque la discontinuité qui se propage est du premier ordre. Nous emploierons à cet effet l'intégrale

$$\int u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

ou *circulation*, prise le long d'un contour fermé C.

Ce contour étant de forme entièrement arbitraire, nous pouvons supposer pour simplifier que pendant les instants où il traverse la surface d'onde, il n'est jamais rencontré par elle qu'en deux points.

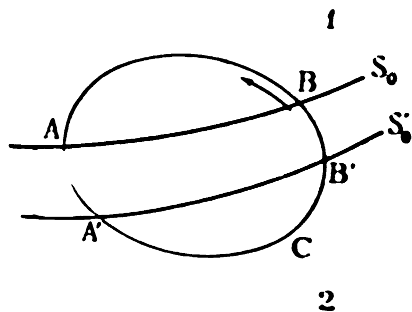


Fig. 25

Soient alors A, B les deux points de rencontre à un instant déterminé t. Prenons pour état initial l'état de la région 1 à cet instant ; soient encore A′ B′ les positions initiales des points de rencontre à l'instant $t + dt$: ces points seront déterminés par la nouvelle surface d'onde S'_0, située à une distance θdt de la première S_0.

Pour évaluer de combien a varié la circulation pendant l'intervalle de temps dt, nous considérerons séparément :

1° Les deux arcs BA, A'B' (*fig.* 25) dont le premier appartient, pendant tout l'intervalle de temps considéré, à la région 1, le second à la région 2 ;

2° Les deux petits arcs AA', B'B qui passent d'un état à l'autre pendant le temps dt ;

Plaçons-nous dans le cas le plus simple, celui où l'on ne tient pas compte de l'objection d'Hugoniot et où, par conséquent, la pression et la densité sont liées par la loi de Poisson ou, plus généralement, par une relation ayant la forme (13) du n° **131**.

La variation relative à l'arc BA est donnée par les considérations classiques qui servent à établir le théorème des tourbillons [1]. Elle est égale au produit de dt par la différence des valeurs que prend, aux points A et B, la quantité

$$(1) \qquad Q = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V - \int \frac{dp}{\rho}$$

où V est toujours le potentiel des forces pondérales et où le dernier terme, que nous désignerons par — P, est comme on sait, dans nos hypothèses actuelles, une fonction de ρ.

De même la variation de l'intégrale prise suivant l'arc A'B' est le produit de dt par la différence des valeurs que prend la quantité Q aux points B' et A'.

La somme de ces deux termes donne (en supposant le contour parcouru dans le sens A'B'BA)

$$(2) \qquad dt(Q_A - Q_B + Q_{B'} - Q_{A'}) = dt\left[Q_A - Q_{A'} - (Q_B - Q_{B'})\right]$$

où, dans chacune des différences $Q_A - Q_{A'}$, $Q_B - Q_{B'}$, on peut faire abstraction du terme V, qui est continu au passage de l'onde.

Occupons-nous maintenant de la partie relative à l'arc AA'. Soient x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1 les coordonnés et les composantes de la vitesse d'un point de cet arc dans l'état 1 ; x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2, les mêmes quantités considérées dans l'état 2 : on aura,

$$(3) \qquad \begin{cases} u_2 = u_1 - \lambda\theta \\ v_2 = v_1 - \mu\theta \\ w_2 = w_1 - \nu\theta \end{cases}$$

[1] Kirchhoff, *Mécanique*, 15e leçon.

et, d'après les formules (9) du n° **55**,

$$(4)\qquad \begin{cases} dx_2 = dx_1 + \lambda(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1) \\ dy_2 = dy_1 + \mu(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1) \\ dz_2 = dz_1 + \nu(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1) \end{cases}$$

en désignant toujours par λ, μ, ν, θ les composantes de la discontinuité et la vitesse de propagation rapportées à l'état initial (c'est-à-dire à l'état de la région 1) et par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'onde.

Il vient donc, en multipliant respectivement les quantités (3) par les quantités (4)

$$\begin{aligned} u_2 dx_2 + v_2 dy_2 + w dz_2 = u_1 dx_1 + v_1 dy_1 + w_1 dz_1 - \theta(\lambda dx_1 + \mu dy_1 + \nu dz_1) \\ + (\lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1)(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1) \\ - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\theta(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1). \end{aligned}$$

dt étant considéré comme un infiniment petit, les intégrales prises suivant l'arc AA', par exemple, se réduiront aux différentielles correspondantes. La différentielle $\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1$, projection normale de l'arc AA', ne sera autre que θdt, distance des deux surfaces d'ondes dans l'état initial. L'expression $\lambda dx_1 + \mu dy_1 + \nu dz_1$ se ramènera à la précédente si nous remplaçons λ, μ, ν par leurs valeurs $l\alpha$, $l\beta$, $l\gamma$ (où l est la grandeur de la discontinuité) : elle sera égale à $l\theta dt$, pendant que $\lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1$ représentera lv_{1n} (où v_{1n} désigne, comme au n° **103**, la composante normale de la vitesse dans l'état 1). La variation de l'intégrale relative à AA' sera donc

$$\begin{aligned} u_1 dx_1 + v_1 dy_1 + w_1 dz_1 - (u_2 dx_2 + v_2 dy_2 + w_2 dz_2) \\ = l\theta\{(l+1)\theta - v_{1n}\}\, dt, \end{aligned}$$

si nous supposons, pour fixer les idées, que la propagation a lieu de la région 1 vers la région 2 et que, par conséquent, les molécules atteintes par l'onde passent de l'état 2 à l'état 1.

L'intégrale relative à BB' aura une expression tout analogue, mais prise en signe contraire.

Mais dans l'expression (2), nous pouvons aussi évaluer la différence des valeurs de $\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ aux points A et A' (ou aux points B et B') à l'aide des formules (3). Il viendra ainsi, comme au n° **257**,

$$\left[\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right] = l\theta v_{1n} - \frac{l^2\theta^2}{2}.$$

La variation totale de la circulation, c'est-à-dire la somme des expressions (2) et (5), sera dès lors égale au produit de dt par la quantité

$$(6) \qquad P_2 - P_1 + l\theta^2\left(\frac{l}{2} + 1\right)$$

relative au point A, diminuée de la quantité analogue relative au point B.

Utilisons maintenant les formules

$$l = \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1,$$
$$l = -\frac{1}{\rho_1\theta^2}(p_2 - p_1)$$

du n° **256**. La quantité (6) devient

$$(7) \qquad \Pi = P_2 - P_1 - \frac{p_2 - p_1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Il est clair, dans ces conditions, qu'une fois le contour C complètement passé dans la région 1, la circulation suivant le contour aura augmenté de l'intégrale curviligne

$$(8) \qquad \int \Pi\, dt,$$

dans laquelle t représente l'instant où un point quelconque du contour aura traversé l'onde, la quantité Π correspondante étant calculée au moment de ce passage.

Supposons le contour C très petit et très voisin d'un point déterminé O de la surface S. Rapportons le à trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dont les deux premiers soient tangents à S en O, le troisième normal et dirigé vers la région 2. t sera alors une fonction de ξ, η, ζ, et il en sera de même de Π. L'intégrale (8) pourra s'écrire

$$(9) \qquad \int \Pi\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial t}{\partial \eta}\, d\eta + \frac{\partial t}{\partial \zeta}\, d\zeta\right).$$

On sait que, pour obtenir les composantes du tourbillon, il suffit d'appliquer à la circulation le long d'un contour fermé le théorème de Stokes, de manière à la mettre sous la forme

$$(10) \qquad \int\int_\Sigma [p \cos(n, \xi) + q \cos(n, \eta) + r \cos(n, \zeta)]\, d\Sigma$$

(où Σ est une surface quelconque menée par le contour et limitée à ce contour, et où n est la normale en un point quelconque de Σ : les quantités p, q, r sont alors les composantes cherchées. On aura donc les composantes **p**, **q**, **r** du tourbillon additionnel produit par le passage de l'onde en faisant ce même calcul sur l'intégrale (9) : il vient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\Pi \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\Pi \frac{\partial t}{\partial \eta}\right) = \frac{D(\Pi, t)}{D(\eta, \zeta)} \\ \mathbf{q} &= \frac{D(\Pi, t)}{D(\zeta, \xi)} \\ \mathbf{r} &= \frac{D(\Pi, t)}{D(\xi, \eta)}. \end{aligned}$$

Si, enfin, nous tenons compte de ce que le contour est infiniment voisin de l'origine, nous devrons faire $\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial \eta} = 0$ (puisque les axes des ξ et des η sont tangents à S) et $\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{1}{\theta}$: d'où enfin les formules cherchées.

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{\theta}\frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \\ \mathbf{q} &= -\frac{1}{\theta}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \\ \mathbf{r} &= 0. \end{aligned} \right.$$

ξ et η peuvent être considérés comme des coordonnées curvilignes sur la surface S, dont un point quelconque, voisin de O, peut être substitué à sa projection sur le plan tangent en O. Les valeurs de **p** et de **q** dépendent alors uniquement de la distribution des valeurs de Π sur S : Il résulte des formules (**11**) qu'*une onde de choc crée toujours des tourbillons par son passage si la quantité* Π *n'est pas constante sur l'onde à chaque instant*.

Il est d'ailleurs clair que, sur une onde prise au hasard, Π ne sera pas constant, à moins que la relation entre la pression et la densité ne soit telle que cette quantité soit identiquement nulle. Mais c'est ce qui n'aurait lieu, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, que dans le cas, dont nous avons parlé au n° **141**, où $\frac{1}{\rho}$ serait une fonction linéaire de p.

Nous avons admis, dans ce qui précède, l'exactitude de la loi de Poisson. Si l'on se plaçait au point de vue d'Hugoniot, la question perdrait de son intérêt, parce que les tourbillons, après avoir été modifiés au moment du

passage de l'onde, continueraient à s'altérer dans le mouvement continu qui suivrait. La quantité k qui figure dans la relation

$$p = k\rho^m$$

devenant, en effet, variable après la discontinuité, la quantité $\frac{dp}{\rho}$ cesserait d'être une différentielle exacte et la théorie générale des tourbillons d'être applicable.

Il est d'ailleurs aisé de calculer, même dans ce cas, la variation instantanée du tourbillon. Il faut toutefois observer qu'à cette variation instantanée viendra s'en joindre une autre continue. Si donc nous considérons, comme tout à l'heure, notre contour C qui met, à traverser l'onde, un certain temps τ (d'ailleurs très petit en même temps que les dimensions de C), la variation qui se sera produite, pendant le temps τ, dans la circulation le long de C, sera l'effet combiné des deux causes dont nous venons de parler, et non celui de la seule variation instantanée.

Mais il est aisé de discerner le terme provenant de cette dernière de celui qui est dû à la variation continue. Ce dernier est, en effet, de l'ordre de $\Sigma\tau$, où Σ est une aire limitée au contour C : il sera donc infiniment petit par rapport à la variation instantanée, qui est de l'ordre de Σ.

Dans l'expression $\Pi_A - \Pi_B$, qui nous fournissait tout à l'heure, au facteur dt près, la variation élémentaire de circulation, une seule catégorie de termes devra être modifiée : ce sont les termes en P. Leur ensemble $(P_2 - P_1)_A - (P_2 - P_1)_B$ devra évidemment être remplacé par la différence des valeurs que l'on obtient pour l'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ lorsqu'on la prend de B en A sur la partie du contour C située dans l'état 1 ou sur la partie située dans l'état 2.

Soit menée la surface Σ limitée au contour C, et que nous supposerons, pour fixer les idées, constamment composée des mêmes molécules. Soit σ la ligne B A suivant laquelle Σ coupe la surface d'onde S au temps t. Nous remplacerons la différence des deux intégrales dont nous venons de parler par l'expression

$$\int_\sigma \left(\frac{dp_2}{\rho_2} - \frac{dp_1}{\rho_1}\right). \tag{12}$$

En opérant ainsi, nous altérerons la différence en question d'une quan-

tité de l'ordre de Σ : cette quantité, dans l'intégrale prise par rapport à t dans l'intervalle de temps τ, donnera un résultat de l'ordre de $\Sigma\tau$, lequel devra être négligé d'après ce qui a été dit plus haut.

Soit s un paramètre correspondant à un point variable sur σ et croissant de B en A, par exemple l'arc de σ compté à partir du point B. Nous pourrons prendre comme coordonnées curvilignes sur Σ, l'instant t où une molécule quelconque de cette surface est atteinte par l'onde et la valeur de s déterminant la position de cette molécule sur la ligne σ correspondante. D'après l'hypothèse faite sur la position du plan des $\xi\eta$, on aura sensiblement

$$(13) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0,$$

et cela en tout point de Σ et à tout instant t_1 postérieur, mais d'une quantité suffisamment petite, à l'intervalle de temps τ (et où, par conséquent l'aire Σ, complètement située dans la région 1, sera infiniment voisine de l'onde).

D'autre part, l'intégrale de la quantité (12), prise par rapport à t est évidemment

$$(14) \qquad \int\int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial s} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial s}\right) ds\, dt.$$

p_1 et p_2 étant déterminés pour chaque molécule (ils doivent être, comme précédemment, au moment de son passage à travers l'onde) et étant, par conséquent, fonctions des coordonnées ξ, η, ζ de cette molécule à l'instant t_1, on aura (puisque $\frac{\partial\zeta}{\partial s} = 0$)

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial p_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s} \qquad (i = 1, 2).$$

Si nous reportons ces valeurs dans l'intégrale (14), il suffira d'employer les relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial s}\, ds\, dt = -\frac{d\Sigma}{\theta}\cos(n, \eta), \qquad \frac{\partial \eta}{\partial s}\, ds\, dt = \frac{d\Sigma}{\theta}\cos(n, \xi$$

qui résultent des équations (13), pour mettre celle-ci sous la forme (10).

le coefficient de cos (n, ξ) étant $\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\right)$ et celui de cos (n, η), $-\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p_2}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial \xi}\right)$. On a donc

$$\mathrm{p} = \frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{p_2 - p_1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right]\right\}$$

$$\mathrm{q} = -\frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{p_2 - p_1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right]\right\}$$

$$\mathrm{r} = 0$$

où on devra supposer p_1, p_2, ρ_1 et ρ_2 liées par la relation adiabatique dynamique (**13**) du n° **257**. Cette relation permet d'ailleurs de mettre les formules précédentes sous la forme

$$\begin{aligned}\mathrm{p} &= -\frac{1}{(m-1)\theta}\left(\rho_2{}^{m-1}\frac{\partial k_2}{\partial \eta} - \rho_1{}^{m-1}\frac{\partial k_1}{\partial \eta}\right)\\ &= -\frac{\mathrm{R}}{(m-1)\theta}\left(\mathrm{T}_2\frac{\partial \log k_2}{\partial \eta} - \mathrm{T}_1\frac{\partial \log k_1}{\partial \eta}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{q} &= \frac{1}{(m-1)\theta}\left(\rho_2{}^{m-1}\frac{\partial k_2}{\partial \xi} - \rho_1{}^{m-1}\frac{\partial k_1}{\partial \xi}\right)\\ &= \frac{\mathrm{R}}{(m-1)\theta}\left(\mathrm{T}_2\frac{\partial \log k_2}{\partial \xi} - \mathrm{T}_1\frac{\partial \log k_1}{\partial \xi}\right)\end{aligned}$$

où T_1, T_2 sont les deux températures absolues, pendant que l'on a

$$k_1 = \frac{p_1}{\rho_1{}^m}, \qquad k_2 = \frac{p_2}{\rho_2{}^m}$$

et que R *désigne la constante qui figure au second membre dans l'équation* (5) du n° **125**.

NOTE IV

—

SUR LA RÉFLEXION DANS LE CAS D'UN PISTON FIXE

Nous avons vu au chapitre IV (nº **180**) qu'en cherchant à tenir compte à la fois du mouvement préexistant du gaz (ce mouvement étant quelconque) et du mouvement du piston, on était conduit à un problème très différent de celui qui correspond au cas où le mouvement initial intervient seul et d'une difficulté bien plus grande grâce, à cette circonstance que l'on a à déterminer une solution de l'équation d'Euler (équation (**46**) nº **175**) par des données relatives à une ligne inconnue du plan des $\xi\eta$.

Il est cependant un cas particulier qui fait exception et où la question se résout sans difficulté, c'est celui où le piston est immobile (ou plus généralement animé d'un mouvement uniforme).

Alors en effet à l'extrémité du tube (par exemple pour $a = 0$) la quantité $u = \frac{\xi + \eta}{2}$ sera nulle (ou constante).

D'autre part, pour u constant et x seul initialement, on a toujours $x = ut$.

Dans ces conditions, *la quantité z définie par la formule* (**30**) *du* nº **170** *sera nulle.*

Nous avons donc à déterminer une solution z de l'équation d'Euler par les conditions suivantes :

1º z sera nul pour $\xi + \eta = 0$ (ou pour $\xi + \eta$ égal à une constante donnée $2v$) ;

2º Les valeurs de z seront connues sur une certaine caractéristique $\eta = \text{const.}$, à savoir l'onde suivant laquelle le mouvement cherché se raccorde au mouvement initial donné soit

$$\eta = \eta_0.$$

Nous avons dit plus haut (chap. VII) qu'un tel problème est possible et déterminé, pourvu que les données précédentes concordent au point du plan des $\xi\eta$ qui est commun aux deux lignes précédentes, c'est-à-dire lorsque l'on donne à η la valeur η_0 et à ξ la valeur $\xi_0 = 2v - \eta_0$.

Pour en trouver la solution, traçons la seconde caractéristique $\xi = \xi_0$ qui passe par ce même point et qui n'est autre que la symétrique de la première par rapport à la ligne droite Δ représentée par l'équation $\xi + \eta = 2v$. Considérons la solution z de l'équation d'Euler qui prend, pour $\eta = \eta_0$, les valeurs données et pour $\xi = \xi_0$, des valeurs égales et de signes contraires aux premières. J'entends par là que, au point (ξ_0, η), z aura une valeur égale et de signe contraire à celle qu'il prend au point $(2v - \eta, \eta_0)$ symétrique du précédent par rapport à Δ.

D'après ce que nous avons vu au n° **172**, en nous donnant ainsi les valeurs de z pour $\xi = \xi_0$ d'une part, pour $\eta = \eta_0$ de l'autre, nous déterminons une intégrale de l'équation d'Euler.

Or il est clair que cette intégrale prend des valeurs égales et de signes contraires en deux points quelconques symétriques l'un de l'autre par rapport à Δ, c'est-à-dire dont les coordonnées ξ, η ; ξ' η' sont liées par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi' = 2v - \eta, \\ \eta' = 2v - \xi. \end{cases}$$

La transformation ainsi définie ne change pas, en effet, l'équation aux dérivées partielles et change les signes des données initiales. Puisqu'elle change de signe lorsqu'on passe d'un côté à l'autre de Δ, l'intégrale z est nulle sur Δ : *elle représente la solution cherchée* solution que l'on déterminera par la formule (40) du n° **172**.

Il est aisé de mettre en évidence, dans le calcul auquel nous sommes ainsi amenés, le phénomène de la réflexion. Soient, en effet u, ω les valeurs prises par u et ω moyennant les formules (27) du n° **170**, lorsqu'on donne à ξ la valeur [illegible] et à η la valeur [illegible]. La transformation (1) que nous avons écrite il y a un instant correspond à

$$u \quad 2 \cdot \quad v, \quad [illegible]$$

La nouvelle valeur de z étant [illegible], la nouvelle valeur de $a = \frac{\partial z}{\partial \omega}$, de [illegible] et [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

Si donc, l'état initial du fluide donné étant supposé correspondre à $a > 0$, nous considérons une masse fluide toute semblable remplissant la région $a < 0$, et que nous imprimions à ce second milieu un mouvement tel que, moyennant les relations (**2**), on ait (**3**), l'ensemble du fluide réel et du fluide fictif formera une seule masse dont le mouvement satisfera à l'équation aux dérivées partielles. Ce mouvement, qui se calculera à partir de l'état initial du fluide donné comme il a été expliqué au n° **179**, satisfera de lui même à la condition $x = vt$ pour $a = 0$, de sorte que nous pourrons dans ces conditions supprimer le piston.

Or chaque molécule du fluide fictif est, à un instant quelconque, symétrique de la molécule correspondante du fluide réel par rapport à la cloison.

Bien entendu, la solution ainsi obtenue peut être sujette à la difficulté signalée à la fin du n° **179** et donner lieu aux singularités considérées aux n°ˢ **194** et suivants.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

LA MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME DE L'HYDRODYNAMIQUE

CHAPITRE IV

MOUVEMENT RECTILIGNE DES GAZ

CHAPITRE V

LES MOUVEMENTS DANS L'ESPACE

CHAPITRE VI

APPLICATION A LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

CHAPITRE VII

LA THÉORIE GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE

Si donc, l'état initial du fluide donné étant supposé correspondre à $a > 0$, nous considérons une masse fluide toute semblable remplissant la région $a < 0$, et que nous imprimions à ce second milieu un mouvement tel que, moyennant les relations (2), on ait (3), l'ensemble du fluide réel et du fluide fictif formera une seule masse dont le mouvement satisfera à l'équation aux dérivées partielles. Ce mouvement, qui se calculera à partir de l'état initial du fluide donné comme il a été expliqué au n° **179**, satisfera de lui même à la condition $x = vt$ pour $a = 0$, de sorte que nous pourrons dans ces conditions supprimer le piston.

Or chaque molécule du fluide fictif est, à un instant quelconque, symétrique de la molécule correspondante du fluide réel par rapport à la cloison.

Bien entendu, la solution ainsi obtenue peut être sujette à la difficulté signalée à la fin du n° **179** et donner lieu aux singularités considérées aux n^{os} **194** et suivants.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

LA MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME DE L'HYDRODYNAMIQUE

CHAPITRE IV

MOUVEMENT RECTILIGNE DES GAZ

CHAPITRE V

LES MOUVEMENTS DANS L'ESPACE

CHAPITRE VI

APPLICATION A LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

CHAPITRE VII

LA THÉORIE GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE




3 2044 020

